Førelesing 15/11

① Info:

Løysingsforslag på Fronter

NB: Ikkje alle oppgåvene er løyst av same person.

Undervising denne og neste veke:

Rekneøvingar: 1FA, tys. 14:30 – 16:15, r. 246

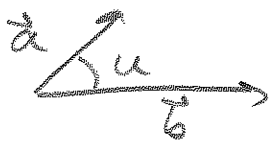
1FB, ons. 12:30 – 14:15, r. 246

1FC, tors. 8:30 – 10:15, r. 246

Andre tider: Opplåst men neppe lærar.

② Rep.: Skalarprodukt:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos u$



③ Fortsette på eksempel frå sist

Poeng $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ for $\vec{a} \neq \vec{0}$ og $\vec{b} \neq \vec{0}$

- Forklare skilnaden mellom "$\Leftrightarrow$" og "$\Rightarrow$"

④ Nytt eksempel (også frå forrige notat)

Leier fram til:

$$\boxed{[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 x_2 + y_1 \cdot y_2}$$

- Gjeld også i rommet (sjå 14,45):

$$[x_1, y_1, z_1] \cdot [x_2, y_2, z_2] = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Eksempel:

Gitt $\vec{a} = [-1, 2, 3]$ og $\vec{b} = [1, 4, -2]$

a) Finn $\vec{a} \cdot \vec{b}$

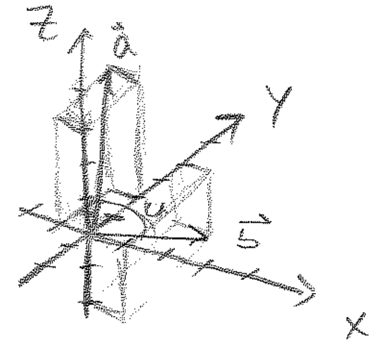
b) Finn vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

Gitt $\vec{c} = [2-x, 3x, 4]$

c) Bestem $\vec{c}$ slik at $\vec{a} \perp \vec{c}$.

---

a)



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [-1, 2, 3] \cdot [1, 4, -2] = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 1$$

b) u er vinkelen mellom vektorane

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos u$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

$$\cos u = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = 0,05832$$

$$u = \cos^{-1} 0,05832 = 86,66^\circ \approx \underline{\underline{86,7^\circ}}$$

c) $\vec{a} \perp \vec{c} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\quad (\vec{a} \neq \vec{0}$ og $\vec{b} \neq \vec{0})$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [-1, 2, 3] \cdot [2-x, 3x, 4] = -1(2-x) + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + x + 6x + 12 = 0$$

$$7x = +2 - 12 = -10$$

$$x = -\frac{10}{7}$$

Vi får: $\vec{c} = [2-(-\frac{10}{7}), 3 \cdot (-\frac{10}{7}), 4] = \underline{\underline{[\frac{24}{7}, -\frac{30}{7}, 4]}}$

5 Vektorprodukter

Skalarprodukt: vektor og vektor gir skalar

Vektor-produkt: vektor og vektor gir <u>vektor</u>

- Berre rom-vektorar.

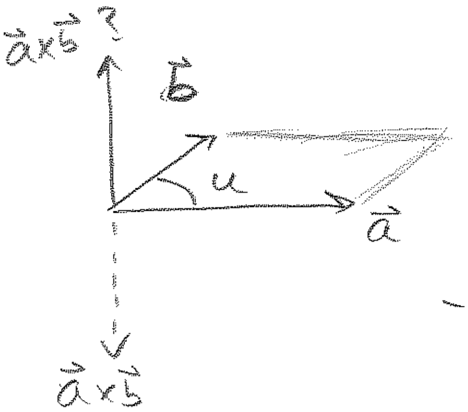
Skriv: $\vec{a} \times \vec{b}$

$\uparrow$

ulikt "·"!

$\vec{a} \times \vec{b}$ skal oppfylle:

1) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ og $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ dannar eit høgrehans-system.
3) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin u$ der u er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$.



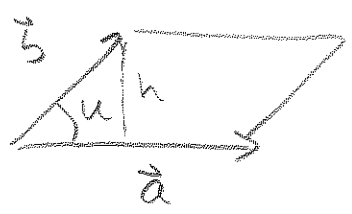
- Høgrehandsregel:
  Handa peikar langs $\vec{a}$.
  Vri fingrane slik at dei peikar langs $\vec{b}$
  Om du strekker tommelen, peikar han no langs $\vec{a}\times\vec{b}$

$\boxed{?}$ er $\vec{a}\times\vec{b}$ lik $\vec{b}\times\vec{a}$?

Nei, $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

$\boxed{?}$ Kvifor?

$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin u$: Areal av parallellogram



$\sin u = \frac{h}{|\vec{b}|}$, $h = |\vec{b}|\cdot\sin u$

$A = |\vec{a}|\cdot h = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin u$

$\boxed{?}$ Kvifor må $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin u$ alltid vere positiv?

Fordi $u\in[0, 180°]$, då blir $\sin u$ aldri negativ.

$\boxed{?}$ Kvifor kan vi ikkje definere eit slikt produkt i planet?

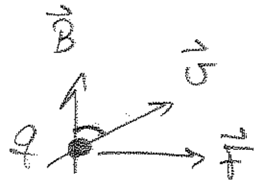
-Dukkar opp i fysikk.

$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$

$\vec{F}$: Magnetisk kraft

$\vec{v}$: Fart

$\vec{B}$: Magnetisk felt



Eksempel

a) Finn vektorproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ når

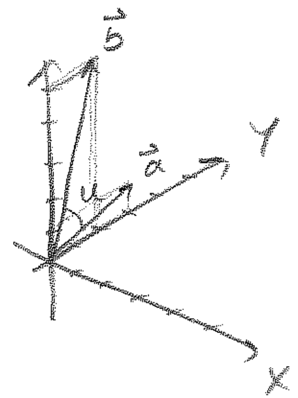
$\vec{a} = [0, 3, 1]$ og $\vec{b} = [0, 2, 5]$

b) Vis at du får det same om du brukar formelen

$$[x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2] =$$

$$[y_1 z_2 - z_1 y_2,\ z_1 x_2 - x_1 z_2,\ x_1 y_2 - y_1 x_2]$$

a)



Ser: $\vec{a} \times \vec{b}$ må, i dette tilfellet, vere parallell med x-aksen, $\vec{a} \times \vec{b} = [l, 0, 0]$, $l > 0$

$l = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin u$

Har: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos u$, $\cos u = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = [0, 3, 1] \cdot [0, 2, 5] = 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 11$

$|\vec{a}| = \sqrt{0^2+3^2+1^2} = \sqrt{10}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{0^2+2^2+5^2} = \sqrt{29}$

$$\cos u = \frac{11}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}} = 0{,}6459$$

$$u = \cos^{-1} 0{,}6459 = 49{,}76^\circ$$

$$l = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \sin u = \sqrt{10}\cdot\sqrt{29}\cdot \sin 49{,}76^\circ = 13{,}0$$

Altså:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \underline{\underline{[13{,}0;\ 0;\ 0]}}$$

b) $[0,3,1]\times[0,2,5] = [3\cdot5-1\cdot2,\ 1\cdot0-0\cdot2,\ 0\cdot2-3\cdot0] = \underline{[13,0,0]}$

- Formelen stemmer i dette tilfellet.
- Gjeld generelt.
- Skriv det som ein <u>determinant</u>:

$$\boxed{[x_1,y_1,z_1]\times[x_2,y_2,z_2] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

Determinanten kan vi rekne ut slik:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{array}\right| =$$

$$\vec{e}_1\, y_1 z_2 + \vec{e}_2\, z_1 x_2 + \vec{e}_3\, x_1 y_2 - \vec{e}_3\, y_1 x_2 - \vec{e}_1\, z_1 y_2 - \vec{e}_2\, x_1 z_2 =$$

$$\vec{e}_1(y_1 z_2 - z_1 y_2) + \vec{e}_2(z_1 x_2 - x_1 z_2) + \vec{e}_3(x_1 y_2 - y_1 x_2) =$$

$$[y_1 z_2 - z_1 y_2,\ z_1 x_2 - x_1 z_2,\ x_1 y_2 - y_1 x_2]$$