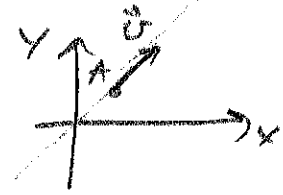
Førelesing

① Minne om innlevering

Heildagsprøve: - Same hjelpemiddel som eksamen
- Tel som ei innlevering
- Får bruke formelsamling

② Repetisjon

Dersom ei linje l går gjennom punktet $A(x_0, y_0)$ og l er parallell med $\vec{v} = [a, b]$, vil dette vere ei parameter-framstilling for l:



$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

[?] Kvifor „ei parameterframstilling" ?

[?] I rommet

Dersom ei linje m i rommet går gjennom punktet $A(x_0, y_0, z_0)$ og m er parallell med $\vec{v} = [a, b, c]$:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

- Parameterframstilling for m.

③ Eksempel

Ein pyramide ABCDE består av ei kvadratisk grunnflate og fire likeside trekantar.

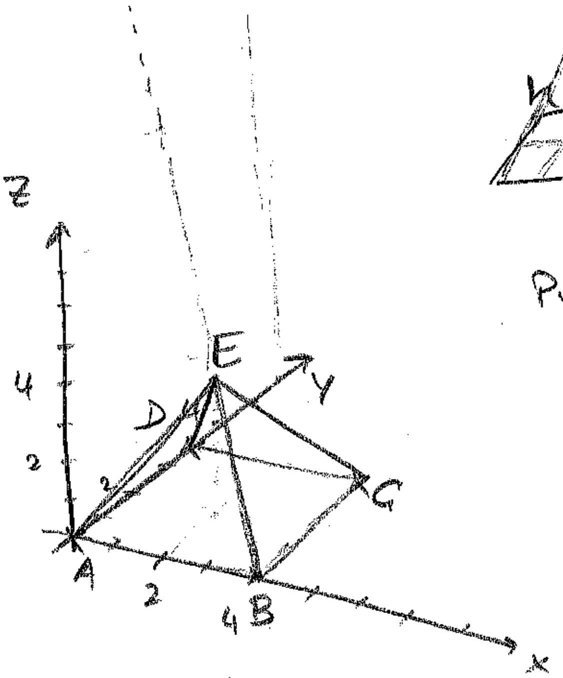
a) Hjørna i kvadratet er gitt med koordinatane $A(0,0,0)$, $B(4,0,0)$, $C(4,4,0)$ og $D(0,0,4)$. Finn koordinatane til E når z-komponenten er positiv, og teikn pyramiden i eit koordinatsystem.

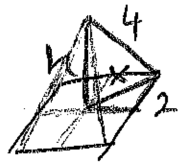
b) Finn volumet av pyramiden

c) Sida EB er ein del av linja l. Finn ein parameterframstilling for l.

d) Kvar skjer l yz-planet?

a)





Pytagoras:

$x^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Pytagoras:

$h^2 + x^2 = 4^2$

$h^2 + \sqrt{8}^2 = 4^2$

$h^2 = 16 - 8 = 8$

$h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$E(2, 2, h)$

E har koordinatar $\underline{(2, 2, 2\sqrt{2})}$

c) ℓ går gjennom punktet $E(2,2,2\sqrt{2})$ og er parallell med $\overrightarrow{EB} = [4-2, 0-2, 0-2\sqrt{2}] = [2, -2, -2\sqrt{2}]$.

Parameterframstilling:

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 2-2t \\ z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,t \end{cases}$$

Eller:

$$\begin{cases} x = 4+2t \\ y = -2t \\ z = -2\sqrt{2}\,t \end{cases}$$

(utgangspunkt i B)

d) yz - planet: $\underline{x=0}$

$x=0$

$2+2t=0$

$t=-1$

$\Rightarrow \quad y = 2-2\cdot(-1) = 4$

$z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\cdot(-1) = 4\sqrt{2}$

Skjeringspunkt: $\underline{(0, 4, 4\sqrt{2})}$

b) Volum: $V = \frac{1}{3}Gh$, der grunnflata har arealet $G = 4\cdot 4 = 16$

$V = \frac{1}{3}\cdot 16\cdot 2\sqrt{2} = \underline{\underline{\frac{32\sqrt{2}}{3}}}$

④ Skalarproduktet

[?] Produkt mellom tal $\rightarrow$ tal

[?] Produkt mellom vektorar ?

$\rightarrow$ tal ?
vektor ?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

Skalarprodukt:

Produkt mellom vektorar som gir eit tal (ein skalar).

Skal oppfylle:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
3) $(x \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = x \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$
4) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ for alle $\vec{a}$

   $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ berre for $\vec{a} = \vec{0}$

Vi definerar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos u$$

der u er vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

Eksempel

Gitt to vektorar $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med $|\vec{a}| = 4$ og $|\vec{b}| = 7$ og vinkelen mellom dei er $u = 60°$

Finn $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos u = 4 \cdot 7 \cdot \cos 60° = \underline{\underline{14}}$$

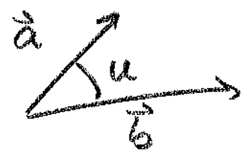
[?] Kva verdiar kan u ta?

– $u \in [0, 180°]$

[?] Stemmer det at $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$?
Kvifor?

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos u$

$= |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos u = \vec{b} \cdot \vec{a}$



[?]

4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}|^2 \geq 0$

for alle $\vec{a}$

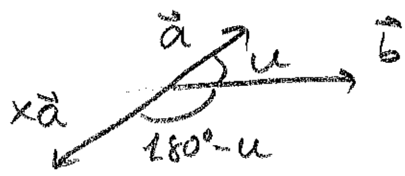
$|\vec{a}| = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

3) $(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = x \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$

Dersom $x > 0$: $|x\vec{a}| = x\,|\vec{a}|$, $x\vec{a}$ og $\vec{a}$ har same retning

$(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = |x\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos u = x\,|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos u = x\vec{a} \cdot \vec{b}$

Med $x < 0$: $|x\vec{a}| = |x| \cdot |\vec{a}|$, $x\vec{a}$ og $\vec{a}$ har motsett retning



$(x\vec{a})\cdot\vec{b} = |x||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(180° - u) =$

$|x|\ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(-\cos u) = -|x|\ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos u =$

$x\ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos u = x\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$

2) - Sparer den til seinare.

Eksempel

Gitt at $|\vec{a}| = 2{,}3$, $|\vec{b}| = 5{,}7$ og $\vec{a}\cdot\vec{b} = 9{,}9$

a) Finn vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

b) Ein annan vektor $\vec{c}$ har $|\vec{c}| = 7{,}0$ og dannar vinkelen $20°$ med $\vec{a}$. Finn $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$

c) Ein tredje vektor $\vec{d}$ står vinkelrett på $\vec{a}$. Finn $\vec{a}\cdot\vec{b}$

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos u$, u: vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$$\cos u = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{9{,}7}{2{,}3\cdot 5{,}7} = 0{,}755$$

$$u = \cos^{-1} 0{,}755 = 40{,}96° \approx \underline{\underline{41°}}$$

b) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = 9{,}9 + 2{,}3\cdot 7{,}0\cdot\cos 20° =$

$25{,}03 \approx \underline{\underline{25{,}0}}$

c) Vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{d}$ er $90°$

$\vec{a}\cdot\vec{d} = |\vec{a}|\cdot|\vec{d}|\cdot\cos 90° = 2{,}3\cdot|\vec{d}|\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

Ser: Hvis vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $90°$, blir $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Altså: $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\boxed{?}$ Gjeld motsett?

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos u = 0$

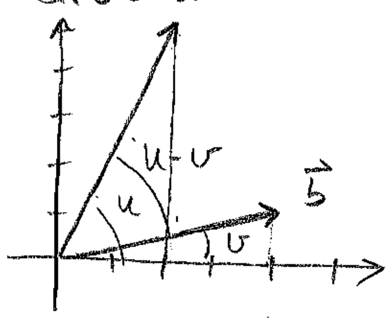
$\Rightarrow |\vec{a}|=0$ eller $|\vec{b}|=0$ eller $\cos u = 0$

Dersom korkje [hverken] $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er $\vec{0}$: $\cos u = 0$, $u = 90°$

Altså:
Dersom $\vec{a}\neq\vec{0}$ og $\vec{b}\neq\vec{0}$ gjeld
$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Eksempel (hvis tid)

Gitt: $\vec{a} = [2,5]$, $\vec{b} = [4,1]$, finn $\vec{a}\cdot\vec{b}$



$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$|\vec{b}| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$

$\tan v = \frac{1}{4} \Rightarrow v = \tan^{-1}\frac{1}{4} = 14{,}0°$

$\tan u = \frac{5}{2} \Rightarrow u = \tan^{-1}\frac{5}{2} = 68{,}2°$

$\boxed{?}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(u-v) = \sqrt{29}\cdot\sqrt{17}\cdot\cos(68{,}2°-14{,}0°)$

$= 12{,}99 \approx \underline{\underline{13{,}0}}$

$\boxed{2}$ Alternativt:

$$\vec{a} = [2, 5] = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$$
$$\vec{b} = [4, 1] = 4\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) \cdot (4\vec{e}_1 + \vec{e}_2) =$$

$$2\vec{e}_1 \cdot (4\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + 5\vec{e}_2 (4\vec{e}_1 + \vec{e}_2) =$$

$$2\vec{e}_1 \cdot (4\vec{e}_1) + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 5\vec{e}_2 \cdot (4\vec{e}_1) + 5\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 =$$

$$2 \cdot 4\, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + 5 \cdot 4\, \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2$$

$\boxed{2}$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$$
$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = \underline{\underline{13}} \quad \text{(eksakt)}$$

Altså: $\vec{a} \cdot \vec{b} = [2, 5] \cdot [4, 1] = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 1$

Generelt: $\boxed{[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 x_2 + y_1 y_2}$