Førelesing 8/3

(1) Gjere eksempla med log.- og eksp.-likningar frå tidlegare

(2) Repetere derivasjonsregel for e^x

$$f(x) = \ln e^x = x$$

$$f'(x) = 1$$

Også: $f(x) = \ln u(x)$ der $u(x) = e^x$

$$f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot u'(x) = \frac{1}{e^x} \cdot (e^x)'$$

Altså:

$$\frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' = 1 \qquad | \cdot e^x$$

$$\cancel{e^x} \cdot \frac{1}{\cancel{e^x}} (e^x)' = e^x \cdot 1$$

$$(e^x)' = e^x$$

[?] $(e^{u(x)})'$

$$(e^{u(x)})' = e^u \cdot u'(x)$$

[?] $(a^x)'$

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\overbrace{\ln a \cdot x}^{u}}$$

$$(a^x)' = e^{\ln a \cdot x} \cdot (\ln a \cdot x)' = (e^{\ln a})^x \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

Altså:

$$\boxed{\begin{aligned} (e^x)' &= e^x \\ (a^x)' &= a^x \cdot \ln a \\ (e^{u(x)})' &= e^{u(x)} \cdot u'(x) \end{aligned}}$$

③ Eksempel med mjølkekartong

Ein mjølkekartong med temperatur 12°C vert sett i eit kjøleskap med temp. 4°C. Dersom $T(t)$ er mjølke-temperaturen i °C etter t minutt og T_{ki} er kjøleskaptemperaturen i °C, seier Newtons lov for varmeovergang at

$$T'(t) = -k\,(T(t) - T_{ki}),$$

der k er ein positiv konstant. Vi lar $T(t)$ vere gitt som

$$T(t) = T_s e^{-kt} + T_{ki}, \quad t \in [0, \rightarrow\rangle$$

a) Kva må T_s vere?

b) Vis at $T(t)$ oppfyller likninga

$$T'(t) = -k\,(T(t) - T_{ki})$$

c) Det viser seg at etter 10 min er temp. 7°C. Bruk dette til å bestemme k.

d) Har $T(t)$ nokon asymptote?

e) Kva vert temperaturen etter 20 min?

f) Når vert temperaturen 5°C?

---

a) $T(0) = 12$

$$T_s \cdot e^{-k\cdot 0} + 4 = 12$$

$$T_s + 4 = 12$$

$$T_s = 12 - 4 = \underline{\underline{8}} \quad , \qquad T(t) = 8e^{-kt} + 4$$

b) Venstre side:

$$T'(t) = (8e^{-kt} + 4) = 8\cdot(e^{-kt})' = 8e^{-kt}\cdot(-k) =$$

$$-8k\, e^{-kt}$$

Høgre side:

$$-k(T - T_{ki}) = -k \cdot (8e^{-kt} + 4 - 4) =$$

$$-k \cdot 8 \cdot e^{-kt} = -8ke^{-kt}$$

Vi ser at høgre- og venstreside er like.
Altså har vi at $T'(t) = -k(T - T_{ki})$

c) $T(10) = 7$

$$8e^{-k \cdot 10} + 4 = 7$$

$$8e^{-10k} = 7 - 4 = 3$$

$$e^{-10k} = \frac{3}{8}$$

$$\ln e^{-10k} = \ln \frac{3}{8}$$

$$-10k = \ln \frac{3}{8}$$

$$k = -\frac{\ln \frac{3}{8}}{10} = \frac{\ln \frac{8}{3}}{10} \approx 0{,}09808$$

$$T(t) = 8e^{-0{,}140 \cdot t} + 4$$

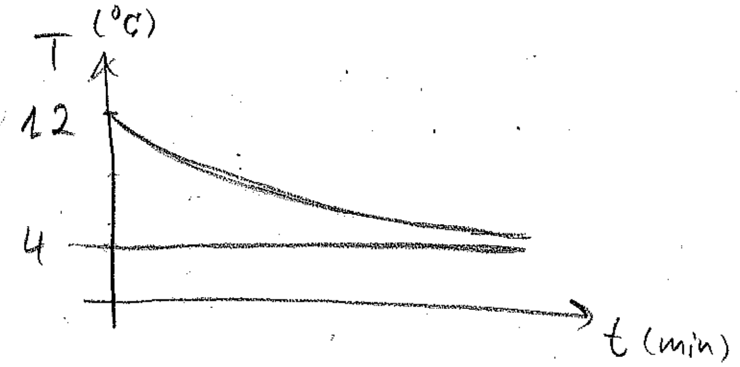
d) Ser: der fins ikkje nokon verdi for t slik at $T \to \pm\infty$ når t nermar seg denne verdien. T har altså ingen vertikale asymptoter.

Når $t \to \infty$:

$$e^{-0{,}09808 \cdot t} = \frac{1}{e^{+0{,}09808 \cdot t}} \to 0$$

$$\Rightarrow T(t) = 8 \cdot e^{-0{,}09808 \cdot t} + 4 \to 8 \cdot 0 + 4 = 4$$

Altså: $\underline{y=4}$ er horisontal asymptote for $T(t)$.



e) $T(20) = 8 \cdot e^{-0{,}09808 \cdot 20} + 4 = 5{,}125 \approx 5{,}13$

Temperaturen etter 20 min er $\underline{\underline{5{,}13°C}}$

f) $T(t) = 5$

$$8 \cdot e^{-0{,}09808 \cdot t} + 4 = 5$$

$$e^{-0{,}09808 \cdot t} = \frac{5-4}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\ln e^{-0{,}09808 \cdot t} = \ln \frac{1}{8} = \ln 8^{-1} = -\ln 8$$

$$-0{,}09808 \cdot t = -\ln 8$$

$$t = \frac{\ln 8}{0{,}09808} \approx 21{,}20 \approx 21{,}2$$

Temperaturen er 5°C etter ca. $\underline{\underline{21{,}2 \text{ min}}}$.

(4) Inverse trigonometriske funksjonar

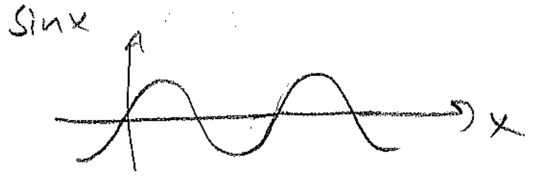
Hugsar: Dersom funksjonen $f(x)$ har ein inversfunksjon, f^{-1}, er denne definert ved at

$$f(x)=y \iff f^{-1}(y)=x$$

For at f skal ha ein invers, må den vere strengt veksande eller strengt avtakande; $f'(x)$ får ikkje skifte forteikn.

[?] Har $\sin x$ ein inversfunksjon?

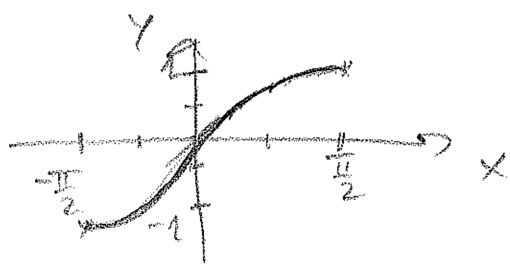
– Tja.



Ser: $\sin x$ både veks og avtar.

Men: Dersom vi avgrensar definisjonsmengda, går det bra:

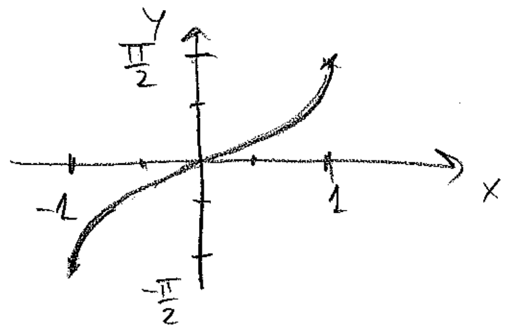
$f(x) = \sin x, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$V_f = [-1, 1]$

Inversfunksjon: $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$



$D_{f^{-1}} = [-1, 1]$

$V_{f^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Tilsvarande har $\cos x$ og $\tan x$ veldefinerte invers-funksjonar når definisjonsmengda vert avgrensa.