# Førelesing 7/3

① Obligar (deler ut i pausen)
Minne om ny oblig til fredag

② „Gjennomgong" av oblig

Oppg. 4: – Har sett på denne alt

Oppg. 1: Kva kan vi finne ut om
$f(x)$ $\boxed{?}$

– Nullpunkt, skjering med y-aksen
– Asymptotar $\boxed{?}$
– Ekstremalpunkt / monotoni $\rightarrow$ $f'(x)$
– Vendepunkt / konkavitet $\rightarrow$ $f''(x)$
– Skissér grafen konsistent med det vi har funne.

(2,5) Rep. av logaritme-omgrepet:

$\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x \qquad (b > 1)$

$\log_{10} \sim \lg$

$\log_e \sim \ln, \qquad e \approx 2{,}718281828$

## (3) Invers-funksjonar (ikkje pensum)

Gitt funksjonen $f(x)$. Invers-funksjonen $f^{-1}(x)$ er den funksjonen vi får ved å „byte om på x- og y-aksen".

Eksempel:

$$f(x) = \sqrt{x}\,, \quad D_f = [0, \rightarrow\rangle$$

Ser: $f^{-1}(x) = x^2$

$\boxed{?}$ Kva blir $f(f^{-1}(x))$?
– og $f^{-1}(f(x))$?

$$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{x^2} = x \quad (x \geq 0)$$

$$f^{-1}(f(x)) = (f(x))^2 = \sqrt{x}^{\,2} = x$$

Generelt:

Dersom $f(x)$ har ein invers-funksjon, $f^{-1}(x)$, gjeld dette:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{og} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Definisjon:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

[?] Kva skal til for at ein funksjon $f(x)$ har ein invers-funksjon?

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$f^{-1}(y)$ skal berre gi ein verdi for x.

Altså: $f(x)$ må vere berre veksande eller berre avtakande.

[?] Oppfyller funksjonen $f(x) = \lg x$ dette?

→ GeoGebra

Ja, $f(x)$ har ein inversfunksjon.

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$y = \lg x$

$x = 10^{\lg x} = 10^y$

Altså: $f^{-1}(y) = 10^y$

$f^{-1}(x) = 10^x$

→ GeoGebra

Ser: - Spegling om linja $y = x$

Kva vert invers-funksjonen til $\ln x$?

$y = \ln x$

$x = e^{\ln x} = e^y$

$f(x) = \ln x \iff f^{-1}(x) = e^x$

Er $f(f^{-1}(x)) = x$ ?

$f(f^{-1}(x)) = \ln e^x = x$ OK

## (5) Den deriverte av eksponential-funksjonen

? Vi huggsar at $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

dersom $f(x) = \ln x$:

$f^{-1}(x) = e^x$

$(f(f^{-1}(x)))' = (x)'$

Kjerneregelen: $f^{-1}(x) = u(x)$

$(f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x)$

$(x)' = 1$

Altså: $f'(u) \cdot u'(x) = 1$

$\frac{1}{u} \cdot u'(x) = 1$

$u'(x) = u$

$(e^x)' = e^x$

Altså: $(e^x)' = e^x$

Den deriverte av eksponentialfunksjonen $e^x$ er funksjonen sjølv!

→ GeoGebra, diskuter

$(e^x)' = e^x > 0$ – veks alltid (og stadig brattare)

$(e^x)'' = (e^x)' = e^x > 0$ – konkavitet opp.

## 6 Eksempel

Deriver desse funksjonane

$a(x) = e^x$

$b(x) = e^{x^2}$

$c(x) = e^x \cdot \ln x$

$f(x) = 10^x$

$a'(x) = \underline{\underline{e^x}}$

$b(x) = e^{x^2}$

$u(x) = x^2$, $b(x) = e^u$

$$\frac{db}{dx} = \frac{db}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 2x = \underline{\underline{2x\, e^{x^2}}}$$

$$c'(x) = (e^x)' \cdot \ln x + e^x \cdot (\ln x)' = e^x \cdot \ln x + e^x \, \frac{1}{x} =$$
$$\underline{\underline{e^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)}}$$

$f(x) = 10^x$

$10 = e^{\ln 10}$

$f(x) = (e^{\ln 10})^x = e^{\ln 10 \cdot x}$

$u = \ln 10 \cdot x$, $f = e^u$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \ln 10 = e^{\ln 10 \cdot x} \cdot \ln 10 =$$
$$(e^{\ln 10})^x \cdot \ln 10 = \underline{\underline{10^x \cdot \ln 10}}$$

Generelt:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$\boxed{?}$ dersom $a = e$:

$$(e^x)' = e^x \cdot \underbrace{\ln e}_{1} = e^x \qquad \text{OK}$$

## (7) Eksempel

Deriver funksjonane

$g(x) = e^{\cos x}$

$h(x) = 7^{x^2}$

---

$g'(x) = e^{\cos x} \cdot (\cos x)' = \underline{\underline{-\sin x \; e^{\cos x}}}$

$h'(x) = 7^{x^2} \cdot \ln 7 \cdot (x^2)' = \underline{\underline{2 \ln 7 \cdot x \cdot 7^{x^2}}}$

Evt. med Leibniz-notasjon:

$u = x^2$

$h(x) = 7^{u(x)}$

$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 7^u \cdot \ln 7 \cdot 2x = 7^{x^2} \cdot \ln 7 \cdot 2x =$

$\underline{\underline{2 \ln 7 \cdot x \cdot 7^{x^2}}}$

## (8) Eksempel med log.- og eksp.-likningar!

Løys likningane

a) $\ln x = 3$

b) $\ln x^2 - 8 = \ln(e \cdot x)$

c) $\frac{6 - 4e^x}{1 - e^x} = e^x$ (eks. frå boka)

a) $\ln x = 3$

$$e^{\ln x} = e^3$$

$$\underline{\underline{x = e^3}} \quad (\approx 20{,}09)$$

b) $\ln x^2 - 8 = \ln(e \cdot x)$

$$2\ln x - 8 = \ln e + \ln x = 1 + \ln x$$

$$2\ln x - \ln x = 1 + 8$$

$$\ln x = 9$$

$$\underline{\underline{x = e^9}} \quad (\approx 8103)$$

c)

$$\frac{6-4e^x}{1-e^x} = e^x \quad , \quad \text{krav: } e^x \neq 1, \; x \neq 0$$

$$\frac{6-4e^x}{\cancel{1-e^x}} \cdot \cancel{(1-e^x)} = e^x \cdot (1-e^x)$$

$$6-4e^x = e^x - e^x \cdot e^x = e^x - (e^x)^2$$

$$(e^x)^2 - 4e^x - e^x + 6 = 0$$

$$(e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0$$

$$e^x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$e^x = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \vee \quad e^x = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$\underline{\underline{x = \ln 2 \quad \vee \quad x = \ln 3}}$$

$\boxed{?}$ $16^x$

$\rightarrow = (4^2)^x =$

$4^{2 \cdot x} = 4^{x \cdot 2} =$

$(4^x)^2$