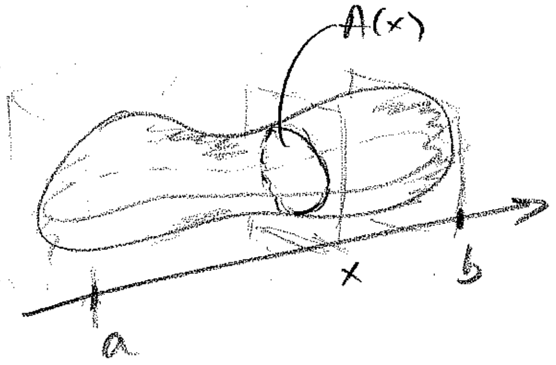
Førelesing 7/4

(1) - I tilfelle nokon lasta ned oblig. 8 tidleg: Oppg. 1c) var feil.

- Presisering: Oppg. 4 c) er vanskeleg.

(2) Repetere frå sist:

Volum som integral over areal



Volumet

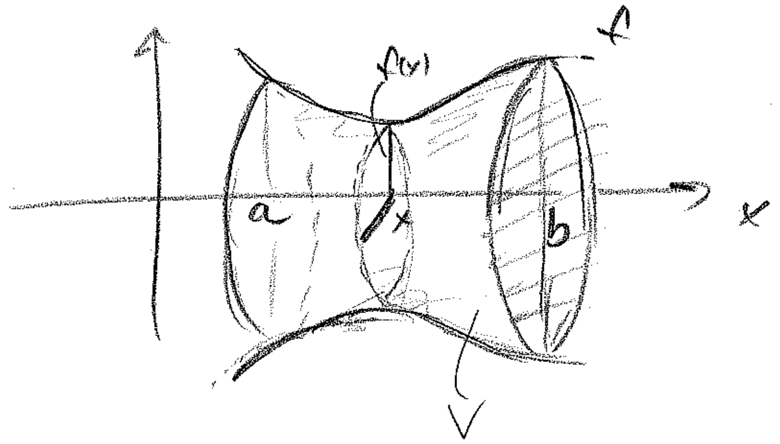
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

(3) To eksempel: Kjegle og kule

(sjå notat frå 7/4)

④ Volum av omdreiingsgjenstandar

- Vi følgjer same tankegang som i eksempelet med kregla.



Gjenstanden kjem fram ved å rotere grafen til f(x) mellom x=a og x=b rund x-aksen.

Dersom x-aksen er aksen i ein dreiebenk, er f(x) profilen til gjenstanden.

[?] Kvar snittflate vert då ei sirkel („disk") med radius f(x);

$$A(x) = \pi\,(f(x))^2$$

Volum: $\int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$

Altså: Volumet av gjenstanden vi får ved å dreie grafen til $f(x)$ mellom $x=a$ og $x=b$ rundt x-aksen er gitt ved:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx}$$

5 Eksempel

Ein lampeskjerm har høgde 2 dm og profil gitt ved $p(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}$, $x \in [0, 2]$ der både p og x er gitt i dm.

Finn volumet avgrensa av lampeskjermen

$$\pi \int_0^2 (p(x))^2 \, dx = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\right)^2 dx =$$

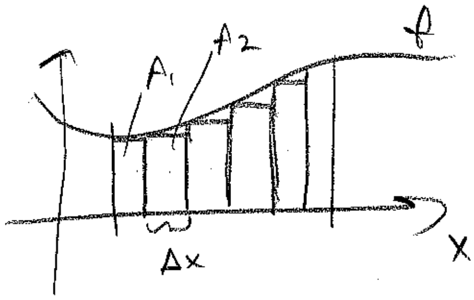
$$\pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16}\right) dx = \pi \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{80}x^5\right]_0^2 =$$

$$\pi\left(\frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{12}\cdot 2^3 + \frac{1}{80}\cdot 2^5 - 0\right) = \frac{47\pi}{30} \approx 4{,}92$$

Volumet er ca. $\underline{4{,}92\,l}$.

($1\,l = 1\,dm^3$).

6 Numerisk integrasjon



$S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n =$

$f(x_1)\cdot \Delta x + f(x_2)\cdot \Delta x + \dots + f(x_n)\cdot \Delta x$

$\left(= \sum_{i=1}^{n} f(x_n)\cdot \Delta x \right)$

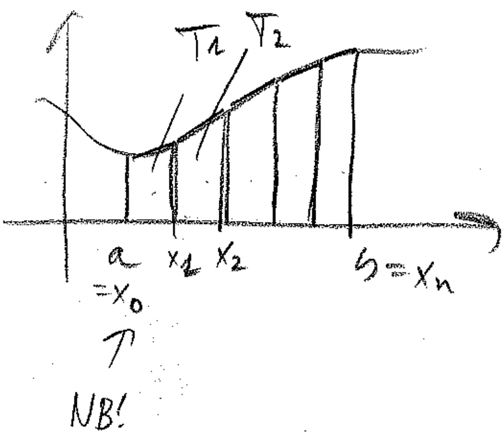
Huggsar: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$

Dermed $\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n$ dersom n er stor

→ Vise figur frå tidlegare

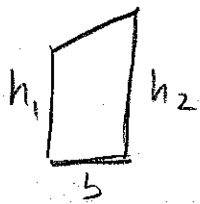
S_n for $\int_1^2 \ln x\,dx$

Betre tilnerming: Trapes-metoden



Areal:

ca $T_1 + T_2 + \dots$



$A = \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot b$

$T_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot \Delta x$

$T_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot \Delta x$

$\vdots$

Ser: $f(x_1)$ vert ~~tatt~~ med to gonger

Andre enden:

$$T_4 = \frac{f(x_3)+f(x_4)}{2} \cdot \Delta x$$

$$T_5 = \frac{f(x_4)+f(x_5)}{2} \cdot \Delta x$$

Altså: Alle vert ~~tatt~~ med to gonger
~~bortsett~~ frå x_0 og x_5

$$A \approx T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 =$$

$$\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\Delta x + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot \Delta x + \dots + \frac{f(x_4)+f(x_5)}{2}\cdot \Delta x$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\big(f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+\dots+ f(x_4)+f(x_4)+f(x_5)\big) =$$

$$\frac{\Delta x}{2}\big(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\dots+2f(x_4)+f(x_5)\big)$$

Generelt

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\big(f(x_0)+2f(x_1)+\dots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\big)$$

der $[a,b]$ er delt opp i n like store delintervall med $a = x_0$, $x_1 = x_0+\Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, ... og $b = x_n$.

– Vise numeriske eksempel

Simpson: Tilpasse med parabel-deler i staden for linjestykke.

-Vise numeriske eksempel.