Førelesing 3/3

① Ny oblig på Fronter

– Litt endra i høve til tysdag ettermiddag / onsdag morgon.

– Oppg. 4: Mykje tekst – ikkje lat det skremme dykk.

Kom på rekneøvingar!

② Fullføre eksempel frå tysdag.

Rep: $\boxed{?}$ Kva vil det seie at

$\lg a = x$?

– At $a = 10^x$

(jmf. kva vil det seie at $\sqrt{a} = x$?

– at $a = x^2$)

d) $(\lg x)^2 - \lg x = 2$

e) $5^x = 7 \cdot 3^x$

f) $3^x - 9^x + 2 = 0$

③ Logaritmefunksjonen (11.6)

[?] $f(x) = \lg x$

Kva vert D_f ?

[?] Finst det eit tal y slik at $-1 = 10^y$?

Finst $\lg(-1)$?

Nei, $\lg x$ er berre definert for $x > 0$

$\underline{D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle}$

[?] Kva når $x \to 0$?

$\lg 1 = \lg 10^0 = 0$

$\lg 0{,}1 = \lg 10^{-1} = -1$

$\lg 0{,}01 = \lg 10^{-2} = -2$

$\vdots$

Når $x \to 0^+$, kva går $\lg x$ mot?

$\lg x \to -\infty$ når $x \to 0^+$.

$x = 0$ er ein vertikal asymptote for $\lg x$

$\rightarrow$ GeoGebra.

$\boxed{?}$ Kva kan vi seie om den deriverte til lg x ?

Ser: lg x aukar heile tida

$\Rightarrow (\lg x)' > 0$ (når $x > 0$)

lg x aukar „brattast" når x er liten, den aukar saktare og saktare når x aukar.

$\Rightarrow (\lg x)'$ minkar når x aukar $(x > 0)$.

$\boxed{?}$ Kva kan vi seie om $(\lg x)''$?

Ser at $(\lg x)'' < 0$ når $x > 0$.

- Kjem tilbake til dette.

$\boxed{?}$ Kva aukar raskast av lg x og x^2?

→ GeoGebra.

④ Logaritmar med andre grunntal (11.4 b))

Den briggske logaritmen, „lg", baserar seg på potensar med 10 som grunntal. Kva er så spesielt med 10, eigentleg? – Ingenting. Vi kan like gjerne rekne med logaritmar basert på andre tal – t.d. a.

[?] Kva må vi krevje av a?

– At $a > 0$.

Definerar lg slik:

$$\lg a = x \iff a = 10^x$$

Meir generelt:

$$\boxed{\log_b a = x \iff a = b^x}$$

Eksempel

Rekn ut:

a) $\log_2 2$

b) $\log_{10} \sqrt{10}$

c) $\log_9 81$

d) $\log_a \dfrac{\sqrt{a} \cdot a^3}{\sqrt[5]{a^2}}$

Merk: Reknereglane vi har sett for lg, gjeld også for $\log_b$:

$$\log_b (s \cdot t) = \log_b s + \log_b t$$

$$\log_b \frac{s}{t} = \log_b s - \log_b t$$

$$\log_b s^x = x \log_b s$$

(5) Eulers tal (11.4 a)

- Der er ingenting spesielt med 10 i logaritme-samanheng. Men der er eit tal som der er noko spesielt ved:

$$e = \lim_{s \to 0} (1+s)^{\frac{1}{s}} = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$

$\longrightarrow$ GeoGebra, plott $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$f(0) = 1$

$f(1) = 2$

$f(2) = 1{,}5^2 = 2{,}25$

$f(5) = 1{,}2^5 = 2{,}4832$

$f(10) = 1{,}1^{10} \approx 2{,}594$

$f(50) = 1{,}02^{50} \approx 2{,}6916$

$f(100) = 1{,}01^{100} \approx 2{,}705$

$f(1000) = 1{,}001^{1000} \approx 2{,}717$

$x \to \infty$: $\quad e \approx 2{,}7\underbrace{1828}\underbrace{1828}\ldots$

Ibsen født.

e-logaritmen:
- Kallar han den „naturlege logaritmen"

$\log_e \to \ln$

Så kvifor er e og ln så spesielle?

Fordi $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$

(Skal vise dette seinare)

[?] Har $\frac{1}{x}$ dei eigenskapene vi diskuterte i stad?

Ser: $\frac{1}{x} > 0$ når $x > 0$

$\frac{1}{x}$ er stor nær 0 og går mot 0 når $x \to \infty$.

$$(\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Ser: $(\ln x)'' < 0$

– Konkavitet ned.

6 Eksempel 1

Deriver desse funksjonane

$a(x) = x^2 \ln x$

$b(x) = \ln x^2$

$c(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$a'(x) = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} =$

$\underline{x(2 \ln x + 1)}$

$b(x) = \ln x^2$

$u(x) = x^2, \quad b(x) = \ln(u(x))$

$\dfrac{db}{dx} = \dfrac{db}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{db}{du} = \dfrac{1}{u}, \quad \dfrac{du}{dx} = 2x$

$\dfrac{db}{dx} = \dfrac{1}{u} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2} = \underline{\dfrac{2}{x}}$

$c'(x) = \dfrac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \underline{\dfrac{1 - \ln x}{x^2}}$

Eksempel 2

Løys likningane

a) $\ln x = 3$

b) $\ln x^2 - 8 = \ln(e \cdot x)$

c) $\dfrac{6-4e^x}{1-e^x} = e^x$ (frå boka)

a) $\ln x = 3$

$e^{\ln x} = e^3$

$\underline{\underline{x = e^3}}$ $(\approx 20,09)$

b) $\ln x^2 - 8 = \ln(e \cdot x)$

$2\ln x - 8 = \ln e + \ln x$

$2\ln x - \ln x = 1 + 8$

$\ln x = 9$

$\underline{\underline{x = e^9}}$ (≈ 8103)