Forelesning 31/3

(1) Repetere integrasjon med variabelskifte:

Dersom $F'(x) = f(x)$ $\quad (F'(u) = f(u))$:

$$\int \underbrace{f(u)}_{\frac{dF}{du}} \cdot \underbrace{u'(x)}_{\frac{du}{dx}} \, dx = F(u) + C$$

Eksempel: $\int f(ax+b)\,dx$

$u = ax+b$

$\frac{du}{dx} = a$

$du = a \cdot dx$

$dx = \frac{1}{a} du$

$$\int f(ax+b)\,dx = \int f(u) \cdot \frac{1}{a}\,du = \frac{1}{a}\int f(u)\,du =$$

$$\frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

(2) Eksempel

Finn desse integrala

a) $\int x e^{x^2} dx$

b) $\int \frac{1}{\cos^2(3x+3)} dx$

c) $\int \frac{x}{x^2+3} dx$

d) $\int_0^2 t \cdot \cos(t^2+1)\, dt$

---

a) $u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$dx = \frac{1}{2x} du$

$\int x e^{x^2} dx = \int x e^u \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int e^u du =$

$\frac{1}{2} e^{u(x)} + C = \underline{\frac{1}{2} e^{x^2} + C}$

Poeng: Lettare å integrere xe^{x^2} enn e^{x^2}

b) $u(x) = 3x+3$

$\frac{du}{dx} = 3$

$dx = \frac{1}{3} du$

$$\int \frac{1}{\cos^2(3x+3)}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 u}\cdot\frac{1}{3}\,du =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{\cos^2 u}\,du \overset{\boxed{2}}{=} \frac{1}{3}\tan u + C' = \underline{\frac{1}{3}\tan(3x+3)+C'}$$

c) $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx$

$u(x) = x^2+3$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$dx = \frac{1}{2x}\,du$

$$\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \int \frac{x}{u}\,\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du =$$

$$\frac{1}{2}\ln|u| + C' = \underline{\ln\sqrt{x^2+3} + C'}$$

d) Ubestemt: $\int t\cdot\cos(t^2+1)\,dt$

$u(t) = t^2+1$

$\frac{du}{dt} = 2t$

$dt = \frac{1}{2t}\,du$

$$\int t\cos(t^2+1)\,dt = \int t\cos u\cdot\frac{1}{2t}\,du = \frac{1}{2}\int \cos u\,du =$$

$$\frac{1}{2}\sin u + C' = \frac{1}{2}\sin(t^2+1) + C'$$

$$\int_0^2 t\cos(t^2+1)\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin(t^2+1)\right]_0^2 =$$

$$\frac{1}{2}\sin(2^2+1) - \frac{1}{2}\sin(0^2+1) = \underline{\frac{1}{2}(\sin 5 - \sin 1)}$$

Alternativt:

$$\int_0^2 t\cos(t^2+1)\,dt = \int_{u(0)}^{u(2)} t\cos u\cdot\frac{1}{2t}\,du =$$

$$\frac{1}{2}\int_1^5 \cos u\,du = \frac{1}{2}\left[\sin u\right]_1^5 = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\sin 5 - \sin 1)}}$$

Ikke alltid fruktbart med substitusjon:

$$\int x^2 e^{3x^2}\,dx$$

$u = 3x^2$

$\frac{du}{dx} = 6x$

$dx = \frac{1}{6x}\,du$

$$\int x^2 e^{3x^2}\,\frac{1}{6x}\,du = \frac{1}{6}\int x\cdot e^u\,du$$

Generell metode:

- Velg en $u(x)$ slik at integranden kan skrivast som en „pen" funksjon av u
- Bestem du ($du = u'(x)\,dx$ eller $dx = \frac{1}{u'(x)}\,du$)
- Skriv opp integralet med u i staden for x (der du kan).
- Håp at integranden er berre avhengig av u — og at det nye integralet er enklare.

③ Delvis integrasjon (16.2)

[?] Kva vert den anti-deriverte til $(u(x)\cdot v(x))'$?

$\hookrightarrow \quad u(x)\cdot v(x) + C$

Har sett at det ofte svarar ein integrasjonsregel til ein derivasjonsregel. Dette er integrasjons-versjonen av produktregelen;

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

Veit: $\int (u\cdot v)'\,dx = u\cdot v + C$

Produktregelen: $\int (u'\cdot v + u\cdot v')\,dx = u\cdot v + C$

$$\int u'\cdot v\,dx + \int u\cdot v'\,dx = u\cdot v + C$$

$$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx + C$$

Merk: Vi får også ut ein konstant av det ubestemte integralet på høgresida; vi kan „legge C inn i denne".

Altså:

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x) = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)}$$

④ Eksempel

Finn desse ubestemte integrala ved delvis integrasjon

a) $\int x \cos x \, dx$

b) $\int (x^2+2) \ln x \, dx$

c) $\int x^2 e^{2x} \, dx$

---

a) $u = x$

$v' = \cos x$

$u' = 1$

$v = \sin x$

Poeng: v skal vere ein antiderivert til v' – ikkje nødvendigvis den generelle (vi treng ikkje legge til C)

$$\int \overset{u}{x} \cdot \overset{v'}{\cos x} \, dx = \overset{u}{x} \cdot \overset{v}{\sin x} - \int \overset{u'}{1} \cdot \overset{v}{\sin x} \, dx =$$

$$x \sin x - \int \sin x \, dx = \underline{x \sin x + \cos x + C}$$

Kontroll: $(x \sin x + \cos x + C)' =$

$$1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x - \sin x + 0 = x \cos x$$

b) $\int (x^2+2) \ln x \, dx$

$u = x^2+2$

$v' = \ln x$

$u' = 2x$

$v = ?$

$- \int \ln \, dx = ?$

- Vi vel u og v' motsett:

$v' = x^2+2$

$u = \ln x$

$v = \frac{1}{3}x^3 + 2x$

$u' = \frac{1}{x}$

$\int \ln x \cdot (x^2+2)dx = \ln x \cdot (\frac{1}{3}x^3+2x) - \int \frac{1}{x}(\frac{1}{3}x^3+2x)\,dx =$

$(\frac{1}{3}x^3 + 2x) \cdot \ln x - \int (\frac{1}{3}x^2+2)\,dx =$

$\underline{(\frac{1}{3}x^3 + 2x) \cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3 + 2x + C}$

c) Av og til må vi gjere delvis integrasjon to gonger

$\int x^2 e^{2x} dx$

$u = x^2$

$v' = e^{2x}$

$u' = 2x$

$v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 2x \cdot \frac{1}{2} e^{2x}\,dx =$$

$$\frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\,dx$$

$\int x\, e^{2x}\,dx$:

$u = x$

$v' = e^{2x}$

$u' = 1$

$v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$\int x\, e^{2x}\,dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x}\,dx =$$

$$\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C_1$$

Altså:

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C_1\right) =$$

$$\frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} - C_1 =$$

$$\underline{\frac{1}{2} e^{2x} \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C} \qquad (C = -C_1)$$