Førelesing 28/3

① Siste evaluering

- Takk ☺
- Lese gjennom det som „kan forbedres"
- Punkt 1, 2, 4: Ok – skal justerast etter
- Punkt 3: Ikkje einig; vi

opplever det tydelegvis ulikt. Eg opplever at det lagem veldig få på rekneøvingane. Villig til å ta diskusjonen, men ikkje i plenum.

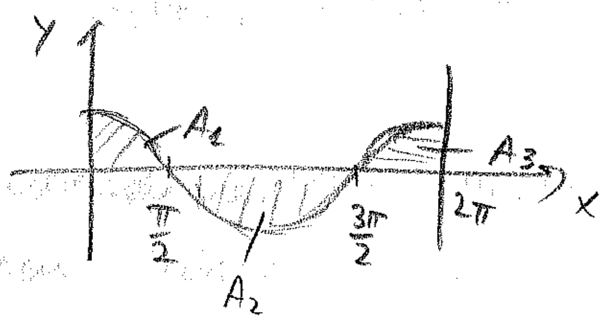
Oblig: Har med ark

② Bevis for relasjonen mellom bestemte integral og den anti-deriverte til integranden (sjå notat frå sist gong).

③ Areal og bestemte integral

Hugsar $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 0$

Men om vi spør: „Kva vert arealet avgrensa av x-aksen og grafen til cos x mellom x=0 og x=2π", vert svaret eit anna.



Areal: $A = A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

$A_2 = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx \right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = -[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -(-1-1) = 2$

$A_3 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin\frac{3\pi}{2} = 0 - (-1) = 1$

$A = \int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x dx = 1 + 2 + 1 = \underline{\underline{4}}$

④ Eksempel

Bestem arealet av området avgrensa av x-aksen og grafen til funksjonen

$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$

Finn nullpunkta:

$f(x) = 0$

$-x^3 + x^2 + 2x = 0$

$x(-x^2 + x + 2) = 0$

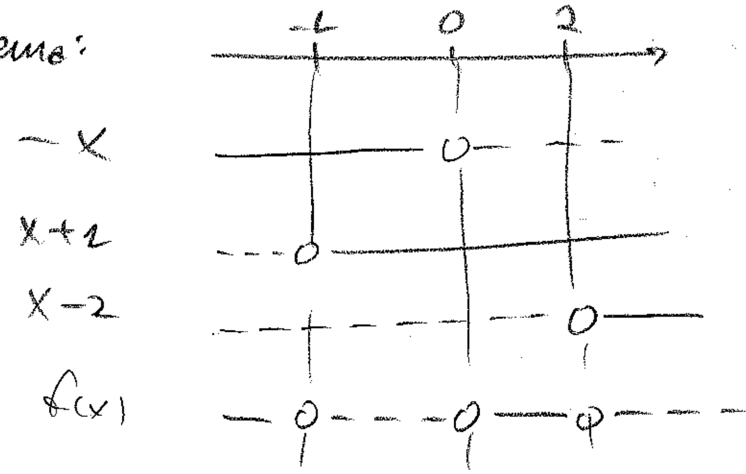
$x = 0 \vee -x^2 + x + 2 = 0$

$x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-1)\cdot 2}}{2\cdot(-1)} = \frac{1 \mp 3}{2}$

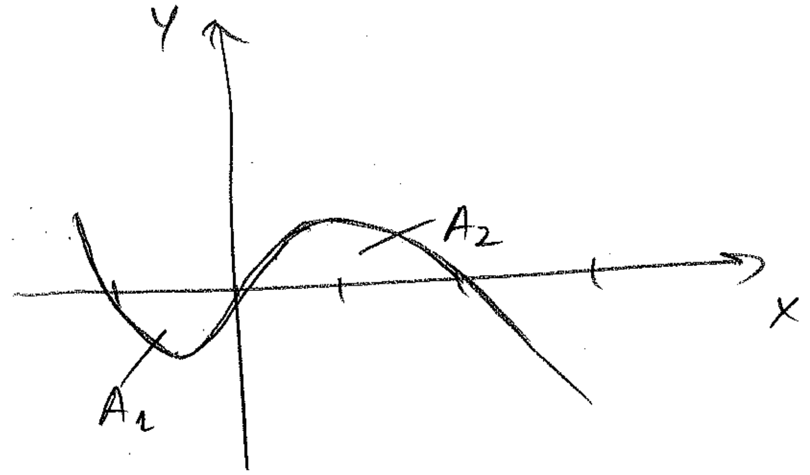
$x = 0 \vee x = \frac{1-3}{2} = -1 \vee x = \frac{1+3}{2} = 2$

Faktorisering: $f(x) = -x(x+1)(x-2)$

Fortegnsskjema:



Skisse:



Areal: $A = -A_1 + A_2 =$

$-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx =$

$-\int_{-1}^{0} (-x^3 + x^2 + 2x)\,dx + \int_{0}^{2} (-x^3 + x^2 + 2x)\,dx =$

$-\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{0}^{2} =$

$-\left(0 - \left(-\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 + \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)^2\right)\right) +$

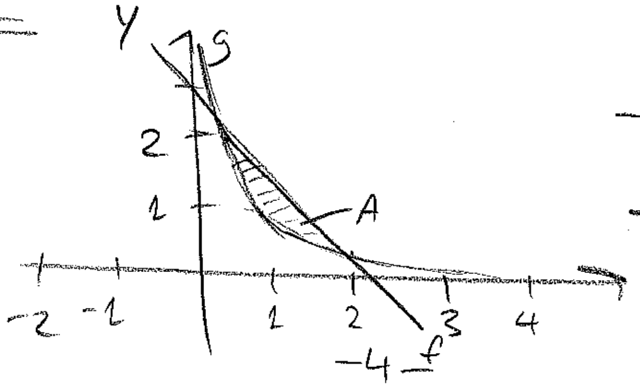
$\left(-\frac{1}{4}\cdot 2^4 + \frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2^2 - 0\right) =$

$-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 + (-4) + \frac{8}{3} + 4 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{3} + 1 = \frac{-3+28+12}{12} = \underline{\underline{\frac{37}{12}}}$

5 Eksempel

Finn arealet avgrensa av grafane til funksjonane $f(x) = -x + \frac{5}{2}$ og $g(x) = \frac{1}{x}$

Skisse:



$f(x) = g(x)$

$-x + \frac{5}{2} = \frac{1}{x}$

$-x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$\vdots$

$x = \frac{1}{2} \lor x = 2$

Area: $A = \int_{1/2}^{2} (f(x) - g(x))\, dx =$

$\int_{1/2}^{2} \left(-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \ln|x|\right]_{1/2}^{2} =$

$-\frac{1}{2}\cdot 2^2 + \frac{5}{2}\cdot 2 - \ln 2 - \left(-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2}\right) =$

$-2 + 5 - \ln 2 + \frac{1}{8} - \frac{5}{4} + \ln\frac{1}{2} =$

$3 - \ln 2 - \frac{9}{8} - \ln 2 = \underline{\underline{\frac{15}{8} - \ln 4}} \quad (\approx 0{,}4887)$