Førelesing 28/4

① Kjapp rep.

Rekker

Geometriske

$$a_n = k \cdot a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k-1}$$

Aritmetiske

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$S_n = n \, \frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

Konvergens: S_n går mot ein bestemt verdi når $n \to \infty$.

② Eksempel

Konvergerar desse rekkene? Kva konvergerar dei mot i så fall?

a) $7 + 11 + 15 + \ldots$

b) $7 + 1 + \frac{1}{7} + \ldots$

c) $9 + 3 + \sqrt[3]{9} + \ldots$

d) Rekka $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ der $a_1 = 1$ og

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \text{ for } n \geq 2$$

e) $2 - 4 + 8 + \dots$

---

a) Aritmetisk rekke med differanse $d = 4$.
Konvergerar ikkje.

b) Geometrisk rekke med kvotient $k = \frac{1}{7}$

$k \in \langle -1, 1 \rangle \Rightarrow$ rekka konvergerar.

Sum: $S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{7}{1-\frac{1}{7}} = \frac{49}{7-1} = \underline{\underline{\frac{49}{6}}}$

c) Ser: Ledda går som $a_n = \sqrt[n]{9} = 9^{\frac{1}{n}}$

$a_n \to 1$ når $n \to \infty$. Rekka divergerar.

d) Skriv opp nokre ledd:

$$1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) +$$
$$\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

Ser: $S_7 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = -\frac{13}{56}$

$S_8 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$

$\vdots$

$S_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$n \to \infty \Rightarrow S_n \to -\frac{1}{2}$

Rekka konvergerar mot $-\frac{1}{2}$

e) Geometrisk rekke med kvotient $k=-2$.

$k<-1 \Rightarrow$ rekka divergerar

③ Når kvotienten er ein funksjon (17.8)

- Ser på ei geometrisk rekke,

$a_1 + a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^3 + \ldots,$

der k er ein funksjon av x.

Eksempel

Rekka

$3 + 6x^2 + 12x^4 + 24x^6$

[?] Kva er kvotienten her?

$\rightarrow 2x^2$

[?] Kva skal til for at rekka konvergerar?

$-1 < k < 1$

$-1 < 2x^2 < 1$

$2x^2 < 1$

$x^2 < \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[?] Kva konvergerer rekka mot då?

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \underline{\underline{\frac{3}{1-2x^2}}}$$

④ <u>Eksempel</u>

a) Bestem konvergensområdet til denne geometriske rekka:

$$1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-2x+1} + \ldots$$

b) Har kvotienten, $k(x)$, nokre asymptotar?

c) Dersom $x=4$, kva vert summen av rekka?

d) Dersom summen av rekka er $\frac{2}{3}$, kva er x?

e) Dersom summen av rekka er 0, kva er x?

a) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ (2. kvadratsetning)

Rekka kan skrivast som

$$1 + 1 \cdot \frac{1}{x-1} + 1 \cdot \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + \ldots$$

Altså, kvotienten er $k = \frac{1}{x-1}$

Krav til konvergens:

$$-1 < k < 1$$

$$-1 < \frac{1}{x-1} < 1$$

To ulikskaper:

1) $\frac{1}{x-1} < 1$ og 2) $-1 < \frac{1}{x-1}$

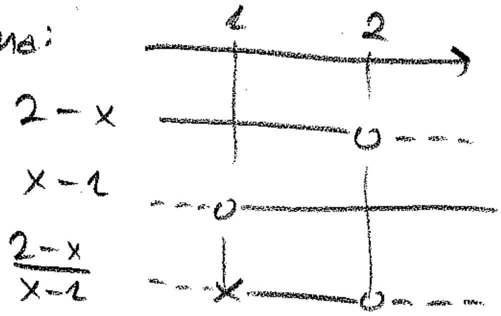
1) $\frac{1}{x-1} < 1$

$$\frac{1}{x-1} - 1 < 0$$

$$\frac{1 - (x-1)}{x-1} < 0$$

$$\frac{2-x}{x-1} < 0$$

Forteiknskjema:



$x < 1$ eller $x > 2$

2)

$$-1 < \frac{1}{x-1}$$

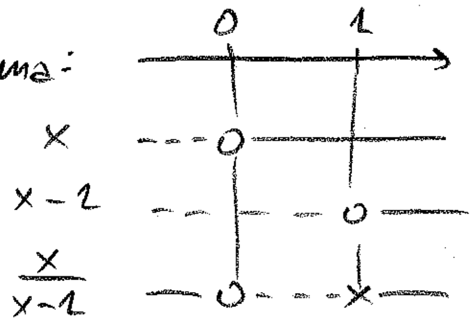
$$\frac{1}{x-1} > -1$$

$$\frac{1}{x-1} + 1 > 0$$

$$\frac{1 + (x-1)}{x-1} > 0$$

$$\frac{x}{x-1} > 0$$

Fortegnskjema:



$x < 0$ eller $x > 1$

Altså: $-1 < k < 1$ gir at

$x < 0$ eller $x > 2$

Konvergensområdet er $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$

$$= \mathbb{R} \setminus [0, 2]$$

b) $k(x) = \dfrac{1}{x-1}$

Ser: $k(x) \to \pm\infty$ når $x \to 1$

$x = 1$ er vertikal asymptote

$k(x) \to 0$ når $x \to \pm\infty$

$y = 0$ er horisontal asymptote.

c) Summen av ei konvergent geometrisk rekke:

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{x-1}} = \frac{x-1}{x-1-1} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$S(4) = \frac{4-1}{4-2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

d) $S(x) = \frac{2}{3}$

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{2}{3}$$

$$x-1 = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3}x = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$$

$$x = \underline{\underline{-1}}$$ (Ser: x ligg i konvergensområdet).

e) $S(x) = 0$

$$\frac{x-1}{x-2} = 0$$

$$x-1 = 0 \quad (x \neq 2)$$

$$x = 1$$

Ser: 1 ligg <u>ikkje</u> i konvergensområdet.
Summen av rekka blir aldri null.

⑤ Eksempel

Ei bedrift slepp ut omtrent 3.000 tonn karbondioksid (CO_2) per månad. Bedrifta vert pålagd å redusere utsleppa med 2,7% kvar månad – frå og med neste månad.

a) Kva vert utsleppa dei neste 4 månadane – om bedrifta sjølvt held pålegget?

b) Kor mykje CO_2 har bedrifta sluppe ut i løpet av året?

c) Kor stor reduksjon, i prosent, er dette i høve til året før?

d) Dersom bedrifta heller skulle redusert utsleppet med den same CO_2-mengda kvar månad, kor stor måtte denne månadsvise reduksjonen ha vore for at samla utslepp dette året skulle vere det same?

a) Utslepp 1. månad: 3.000 tonn

Reduksjon med 2,7% tilsvarar multiplikasjon med $1-0{,}027 = 0{,}973$

Utslepp 2. månad: $3.000 \text{ tonn} \cdot 0{,}973 = 2919$ tonn

3. månad: $3.000 \text{ tonn} \cdot 0{,}973^2 = 2840$ tonn

4. månad: $3.000 \text{ tonn} \cdot 0{,}973^3 = 2764$ tonn

b) Totalt utslepp: $S_{12} = a_1 \cdot \frac{k^{12}-1}{k-1}$

der $a_1 = 3.000$ tonn og $k = 0{,}973$

$$S_{12} = 3.000 \text{ tonn} \cdot \frac{0{,}973^{12}-1}{0{,}973-1} = \underline{\underline{31.107 \text{ tonn}}}$$

c) Utslepp året før: $12 \cdot 3.000 \text{ tonn} = 36.000$ tonn

Reduksjon: $(36.000 - 31.107) \text{ tonn} = 4.892{,}9$ tonn

I prosent: $\frac{4.892{,}9 \text{ tonn}}{36.000 \text{ tonn}} = 0{,}1359 \approx \underline{\underline{13{,}6\%}}$

d) - Auker utseppet med d kvar månad.

- Aritmetisk rekke (? fortsettelse til d)

$a_1 = 3.000$ tonn

$a_{12} = 3.000 \text{ tonn} + 11 \cdot d$

Sum: $S_{12} = 12 \cdot \frac{a_1 + a_{12}}{2} = 6(a_1 + a_{12})$

$31.107 \text{ tonn} = 6 \cdot (3.000 \text{ tonn} + 3.000 \text{ tonn} + 11 \cdot d)$

$31.107 \text{ tonn} = 36.000 \text{ tonn} + 66d$

$$d = \frac{(31.107 - 36.000) \text{ tonn}}{66} = -74{,}13 \text{ tonn} \approx -74{,}1 \text{ tonn}$$

Utsleppet må reduserast med <u>74,1 tonn per månad.</u>