Førelesing 22/3

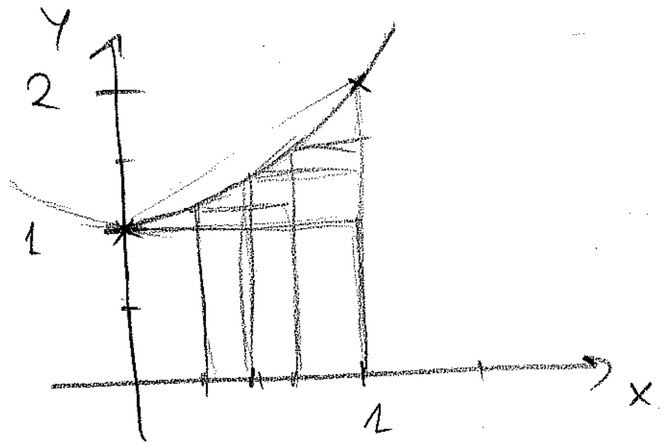
1. Oblig: Mykje bra
   - Litt rusk også (skal gå gjennom seinare)

Ny oblig: Lagt ut på Fronter i dag eller ~~tidleg~~ i morgon

- Beklagar at det vert seint

② Bestemt integral

Vi forsøker å bestemme arealet av området mellom x-aksen og grafen til funksjonen $f(x) = 1 + x^2$ mellom $x=0$ (y-aksen) og $x=1$



Ca: $1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1{,}5$ (litt for høgt).

$S_1 = f(0) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

$S_2 = f(0) \cdot \frac{1}{2} + f(\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + (\frac{1}{2})^2) \cdot \frac{1}{2} =$
$\frac{1}{2} + (1 + \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8} = 1{,}125$

$S_3 = f(0) \cdot \frac{1}{3} + f(\frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3} + f(\frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} + (1 + (\frac{1}{3})^2) \cdot \frac{1}{3} +$
$(1 + (\frac{2}{3})^2) \cdot \frac{1}{3} = 1{,}1852$

$S_4 = f(0) \cdot \frac{1}{4} + f(\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{4} + f(\frac{2}{4}) \cdot \frac{1}{4} + f(\frac{3}{4}) \cdot \frac{1}{4} = \ldots \approx 1{,}219$

$\longrightarrow$ Matlab-plot.

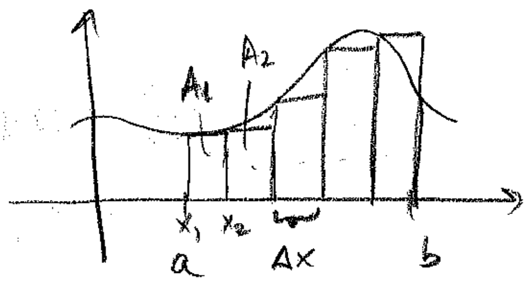
Ser: S_n går mot ein bestemt verdi når $n \to \infty$

Dette talet, $\lim_{n\to\infty} S_n$, kallar vi det bestemte integralet til $f(x)$ frå 0 til L,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^L f(x)\,dx$$

<u>Meir generelt:</u>

Vi deler intervallet $[a,b]$ opp i n like store delar. Kvar del får då vidda $\frac{b-a}{n}$. S_n er då summen av alle rektangla som er slik at øvre venstre hjørne på rektangelet tangerar grafen til f.

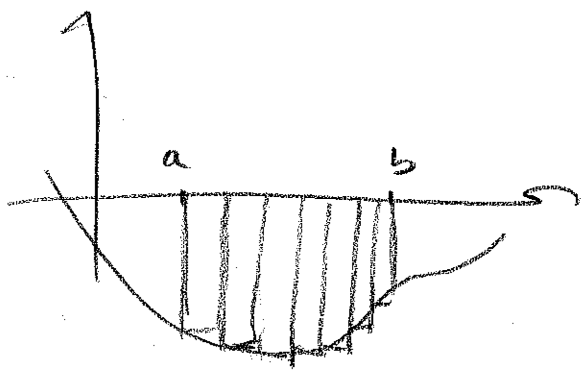


$$S_5 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$
$$= f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \ldots$$

$n=5$

Det bestemte integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er då bestemt ved grenseverdien $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Dersom $f(x) < 0$ i intervallet:



Ser: A_1, A_2, A_3 blir negative

$A_n = f(x_n)\cdot\Delta x < 0$

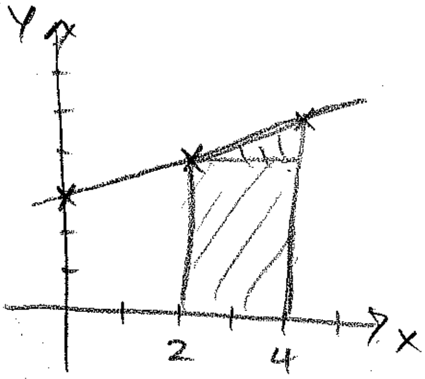
Altså: $S_n < 0$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < 0$

Vi kan altså ikkje utan vidare seie at $\int_a^b f(x)\,dx$ er eit areal

③ Eksempel

Bestem $\int_2^4 f(x)\,dx$ når $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$



Ser $f(x) > 0$ når $x \in [2, 4]$

Difor er $\int_a^b f(x)\,dx$ lik det skraverte arealet.

Areal av rektangel: $(4-2)\cdot 4 = 8$

— " — trekant: $\frac{1}{2}\cdot(4-2)\cdot 1 = 1$

Totalt: $\int_a^b f(x)\,dx = 8 + 1 = 9$

Viktig teorem:

Dersom $F(x)$ er ein anti-derivert til $f(x)$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)}$$

- Sjekkar i høve til eksempelet over:

$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

Anti-derivert: $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x$ (treng ikkje C)

$F(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 = 16$

$F(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 7$

$F(4) - F(2) = 9$

Har funne frå før: $\int_2^4 f(x)\,dx = 9$ OK

$\boxed{?}$ Kva med C ?

<u>Eksempel</u>

Rekn ut dette bestemte integralet:

$$\int_0^1 (1+x^2)\,dx$$

Anti-derivert:

$$\int (1+x^2)\,dx = x + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$F(x) = x + \frac{1}{3}x^3$$

$$\int_0^1 (1+x^2)\,dx = F(1) - F(0) = 1 + \frac{1}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

- Sjekkar mot vår utrekning

Enklare skrivemåte:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$$

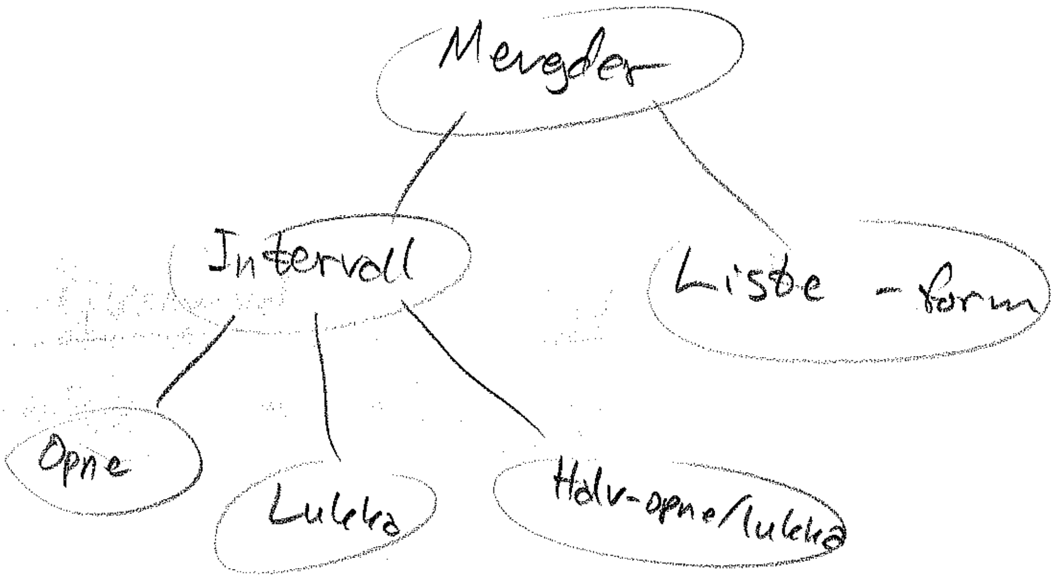
$$\int_0^1 (1+x^2)\,dx = \left[x + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \left(0 + \frac{1}{3} \cdot 0^3\right) = \frac{4}{3}$$

Oblig

- Mykje bra

  Men: Lær språket!

- Har ikkje lært så mykje som vi bør om mengder
- Kjapp gjennomgang om mengder



Eksempel: Mengda av tala π, e og 5: $\{e, \pi, 5\}$

Mengda av alle tala mellom 2 og 5:
$\langle 2, 5 \rangle$

Mengda av alle tala frå og med 2 til 5: $[2, 5\rangle$

Tre nye symbol:

$\cup$ - union

$\cap$ - snitt

$\setminus$ - mengdedifferanse

Eksempel: Mengda av alle tal mindre enn 0 og større enn 5: $\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow \rangle$

Mengda av alle tal som ligg i begge mengdene $\{e, \pi, 5\}$ og $\langle 3, 10]$:

$\{e, \pi, 5\} \cap \langle 3, 10] = \{\pi, 5\}$

Mengda av alle tal mellom 0 og 10 utanom 2 og 3: $\langle 0, 10 \rangle \setminus \{2, 3\}$

Spesielle mengder:

$\mathbb{N}$: Mengda av alle naturlege tal, $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$: —— " —— heiltal, $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$: —— " —— alle rasjonale tal

$\mathbb{R}$: —— " —— alle reelle tal, "$\langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$"

$\emptyset$: Tom mengde

Eksempel

Skriv desse mengdene enklare

a) $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 5, \rightarrow\rangle$

b) $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$

c) $\langle 0, 3] \cap \langle 2, \rightarrow\rangle$

d) $\{\pi, 4, \frac{7}{3}, 115\} \cap \mathbb{N}$

e) $\{e, \pi\} \cap \mathbb{Q}$

a) $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 5, \rightarrow\rangle = \underline{\mathbb{R} \setminus [0, 5]}$

b) $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle = \underline{\langle 0, \rightarrow\rangle \setminus \{1\}}$

c) $\langle 0, 3] \cap \langle 2, \rightarrow\rangle = \underline{\langle 2, 3]}$

d) $\{\pi, 4, \frac{7}{3}, 115\} \cap \mathbb{N} = \underline{\{4, 115\}}$

e) $\{e, \pi\} \cap \mathbb{Q} = \underline{\emptyset}$