

Føreløsing 1/3

① Minne om gjennomgang i rekursivene i dag og i morgen.

② Fra i går

$K(x)$: Pengar på konto etter x gitt at
 $K(0) = 5670 \text{ kr}$, og rente er 5,0%

$$K(x) = 5670 \text{ kr} \cdot 1,050^x$$

$T(t)$: Temperatur i $^{\circ}\text{C}$ på drille som står i snø etter t min gitt at
 $T(0) = 20$ og $T(27) = 13$

$$T(t) = 20 \cdot 0,973^t$$

Når har vi 10.000 kr på konto?

Når har drille temperaturen $5,0^{\circ}\text{C}$?

③ Kiøpp repetisjon: Rekneregler for potenser

$$3^4 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 3^{4+2}$$

Generelt: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $p, q \in \mathbb{N}$

$$\frac{3^4}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3^2 = 3^{4-2}$$

↑
[2]

Generelt: $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$$(3^4)^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8 = 3^{4 \cdot 2}$$

Generelt: $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

0 som potens?

$$3^0$$

Veit: $\frac{3^2}{3^2} = \frac{9}{9} = 1$

Krever at regelen over også gjeld når

$p=q$: $\frac{3^2}{3^2} = 3^{2-2} = 3^0 = 1$

Altså: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

Negativ potens: Krever at rekneregelen gjeld også når $q > p$:

$$3^{-2} = 3^{0-2} = \frac{3^0}{3^2} = \frac{1}{3^2}$$

Generelt: $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

Brøkpotens: $(\sqrt[4]{3})^4 = 3$, dersom vi skriv $\sqrt[4]{3} = 3^{1/4}$ gir rekneregel at $(\sqrt[4]{3})^4 = (3^{1/4})^4 = 3^{1/4 \cdot 4} = 3^1 = 3$, $a^{1/p} = \sqrt[p]{a}$

④ Logaritmer

Kva tal kan skrivast på denne måten: 10^x ?

[?] Kan alle tal skrivast slik ?

- Alle positive tal kan skrivast som 10 opphøgd i nokk.

Hvis $a > 0$ så finst det ein x som er slik at $a = 10^x$. Dette kallar vi (den Briggske) logaritmen til a . Vi skriv: $\lg a = x$

[?] Kva er logaritmen til 10, 1, 100, 0,001, 10^π ?

$$10^1 = 10$$

$$\lg 10 = 1$$

$$1 = 10^0$$

$$\lg 1 = 0$$

$$100 = 10^2$$

$$\lg 100 = 2$$

$$0,001 = 10^{-3}$$

$$\lg 0,001 = -3$$

$$\lg 10^\pi = \pi$$

Nytteverdi: For "kalkulatøren si tid"
bruka ein logaritmar til å gjere
multiplikasjon og divisjon med store
tal.

Eksempel

Reken ut $5738 \cdot 31893 \div 14718$

$$5738 \cdot 31893 \cdot 14718 =$$

$$10^{\lg 5738} \cdot 10^{\lg 31893} \div 10^{\lg 14718} =$$

$$10^{\lg 5738 + \lg 31893 - \lg 14718} =$$

$$10^{3,759 + 4,504 - 4,168} = 10^{4,095} = \underline{\underline{12434}}$$

$\lg a$ og 10^x finn ein frå tabellar.

Vi ser:

$$a \cdot b = 10^{\lg a} \cdot 10^{\lg b} = 10^{\lg a + \lg b}$$

$$\Rightarrow \lg(a \cdot b) = \lg 10^{\lg a + \lg b} \Rightarrow \lg a + \lg b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{10^{\lg a}}{10^{\lg b}} = 10^{\lg a - \lg b}$$

$$\lg \frac{a}{b} = \lg 10^{\lg a - \lg b} = \lg a - \lg b$$

Altså:

$$\left. \begin{array}{l} \lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b \\ \lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b \end{array} \right\}$$

5) Eksempel

Givet at $\lg a = 0,73$ og $\lg b = 3,52$, finn

a) $\lg(a \cdot b)$

b) $\lg \frac{b}{a}$

c) $\lg(10a)$

d) $\lg \frac{b}{100}$

e) $\lg b^2$

f) a og b

a) $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b = 0,73 + 3,52 = \underline{\underline{4,25}}$

b) $\lg \frac{b}{a} = \lg b - \lg a = 3,52 - 0,73 = \underline{\underline{2,79}}$

c) $\lg(10a) = \lg 10 + \lg a = 1 + 0,73 = \underline{\underline{1,73}}$

d) $\lg \frac{b}{100} = \lg b - \lg 10^2 = 3,52 - 2 = \underline{\underline{1,52}}$

e) $\lg b^2 = \lg(b \cdot b) = \lg b + \lg b = 2 \lg b =$
 $2 \cdot 3,52 = \underline{\underline{7,04}}$

f) $a = 10^{\lg a} \approx \underline{\underline{5,37}}$

$b = 10^{\lg b} \approx \underline{\underline{3311}}$

⑥ Ende ein Potenzregel:

$$\text{Hugzar at } \lg b^2 = 2 \lg b$$

$$\text{Generelt: } \lg a^x = x \lg a$$

Beris

$$\boxed{?} \quad 10^{\lg a^x} = a^x, \quad 10^{\lg a} = a$$

$$10^{x \cdot \lg a} = (10^{\lg a})^x = a^x$$

$$\lg a^x = x \lg a$$

⑦ No her vi i stand til å svare på spørsmål fra starten av timen

$$K(x) = 10.000 \text{ kr}$$

$$5760 \text{ kr} \cdot 1,050^x = 10.000 \text{ kr}$$

$$1,050^x = \frac{10.000 \text{ kr}}{5760 \text{ kr}} = 1,736$$

$$\lg 1,050^x = \lg 1,736$$

$$x \cdot \lg 1,050 = \lg 1,736$$

$$x = \frac{\lg 1,736}{\lg 1,050} = 11,31$$

$$\text{Vi } 0,31 \cdot 12 = 3,72 \approx 4$$

Vi har 10.000 kr etter ca 11 år og 4 mnd.

$$T(t) = 5,0$$

$$20 \cdot 0,973^t = 5,0$$

$$0,973^t = \frac{5,0}{20} = 0,25$$

$$(\lg 0,973^t = \lg 0,25)$$

$$t \lg 0,973 = \lg 0,25$$

$$t = \frac{\lg 0,25}{\lg 0,973} = 50,65 \approx 51$$

Drikka har temperaturen $5,0^\circ\text{C}$ etter 51 min.

(8) Eksempel med eksponential- og
logaritme likninger

Løys disse likningane

a) $50 \cdot 0,90^x = 3,0$

b) $3 \lg x - 6 = 0$

c) $\lg x^2 - \lg x = 2$

d) $(\lg x)^2 - \lg x = 2$

e) $5^x = 7 \cdot 3^x$

f) $3^x - 9^x + 2 = 0$

$$a) \quad 5,0 \cdot 0,90^x = 3,0$$

$$0,90^x = \frac{3,0}{5,0}$$

$$x \lg 0,90 = \lg \frac{3,0}{5,0}$$

$$x = \frac{\lg \frac{3,0}{5,0}}{\lg 0,90} = \underline{\underline{4,85}}$$

$$b) \quad 3 \lg x - 6 = 0$$

$$\lg x - 2 = 0$$

$$\lg x = 2$$

$$10^{\lg x} = 10^2$$

$$x = 10^2 = \underline{\underline{100}}$$

$$c) \quad \lg x^2 - \lg x = 2$$

$$2 \lg x - \lg x = 2$$

$$\lg x = 2$$

$$x = \underline{\underline{100}} \quad (\text{jmb. b})$$

$$d) \quad (\lg x)^2 - \lg x = 2$$

$$(\lg x)^2 - \lg x - 2 = 0$$

$$\lg x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\lg x = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{eller} \quad \lg x = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$10^{\lg x} = 10^{-1} \quad \text{eller} \quad 10^{\lg x} = 10^2$$

$$\underline{x=0,1 \text{ eller } x=100}$$

$$e) \quad 5^x = 7 \cdot 3^x$$

$$\lg 5^x = \lg (7 \cdot 3^x)$$

$$x \cdot \lg 5 = \lg 7 + \lg 3^x = \lg 7 + x \cdot \lg 3$$

$$x \cdot (\lg 5 - \lg 3) = \lg 7$$

$$x = \frac{\lg 7}{\lg 5 - \lg 3} = \underline{\underline{3,81}}$$

Alternativt:

$$\frac{5^x}{3^x} = 7$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 7$$

$$x \lg \frac{5}{3} = \lg 7$$

$$x = \frac{\lg 7}{\lg \frac{5}{3}} = \frac{\lg 7}{\lg 5 - \lg 3} = \underline{\underline{3,81}}$$

$$f) \quad 3^x - 9^x + 2 = 0$$

- Her hjelper det lite å bruke lg-funksjonen

$$\text{Men: } 9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$$

Altså:

$$3^x - (3^x)^2 + 2 = 0$$

$$-1 \cdot (3^x)^2 + 1 \cdot (3^x) + 2 = 0$$

$$1 \cdot (3^x)^2 - 1 \cdot (3^x) - 2 = 0$$

$$3^x = -1 \text{ eller } 3^x = 2 \quad (\text{jmb. d1})$$

3^x kan aldri bli negativ

derfor:

$$3^x = 2$$

$$x \lg 3 = \lg 2$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 3} = \underline{\underline{0,631}}$$