Førelesing 17/3

① Midtvegsevaluering
- Takk ☺
- Meir tilbakemelding på oblig:

1. oblig: tok ca. éi arbeidsveke å rette
Heildagsprøve: Ca 10 arbeidsdagar
Nå: 1 oblig ca 15 min
Med kommentarar: Ca det doble
$65 \cdot \frac{15}{60}\,h \approx 15\,h$
$65 \cdot \frac{30}{60}\,h \approx 30\,h$

- Får ikkje pengar til å dekke dette
- Synest Eirik gjer ein <u>god jobb</u>

Men: Raudt ved feil, Ingenting ved rett → Kommentere både rett og feil.

Poeng: 1) Meir kommentarar er <u>ressurskrevande</u>
2) De kan sjølve <u>lett</u> finne ut kva som er rett og feil ved å samanlikne med løysingsforslaget
3) Dersom de lurer på noko / noko er uklart: Kom og spør!

NB: Hopp over <u>15.32</u>!

(2) Ubestemt integral (15.2)

Har sett: Dersom $F'(x) = f(x)$ kan alle anti-deriverte til $f(x)$ skrivast som

$F(x) + C$

der C er ein vilkårleg konstant.

Tungvidt å skrive „$F(x)$ = antiderivert til $f(x)$"

Vi skriv:

$$\underset{\text{lang S}}{\int} f(x)\, \underset{\text{Variabel}}{dx} = F(x) + C$$

$\int f(x)dx$: Det ubestemte integralet av $f(x)$

Eksempel:

$$\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int (t^3 + 2t)\, dt = \frac{1}{4}t^4 + t^2 + C$$

Integrasjon er ein lineær operasjon:

1) $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2) $\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$

Eksempel:

$$\int (t^3 + 2t)dt = \int t^3 dt + 2 \cdot \int t\, dt =$$

$$\frac{1}{4}t^4 + 2 \cdot \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{4}t^4 + t^2 + C$$

③ Itegrasjon av kjende funksjonar (15.2–15.5)

$\boxed{?}$ Derivasjonsreglar:

1) $(x^s)' = s x^{s-1}$

2) $(C)' = 0$, C konstant

3) $(\sin x)' = \cos x$

4) $(\cos x)' = -\sin x$

5) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7) $(e^x)' = e^x$

Dersom $F'(x) = f(x)$: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

3) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

4) $\int -\sin x \, dx = \cos x + C_1$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

2) $\int 0 \, dx = C$

7) $\int e^x \, dx = e^x + C$

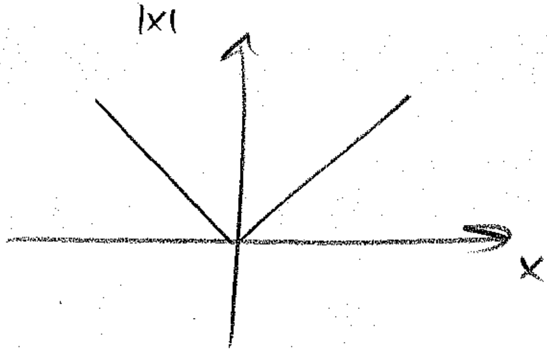
1) $\int s x^{s-1} \, dx = x^s + C_1$

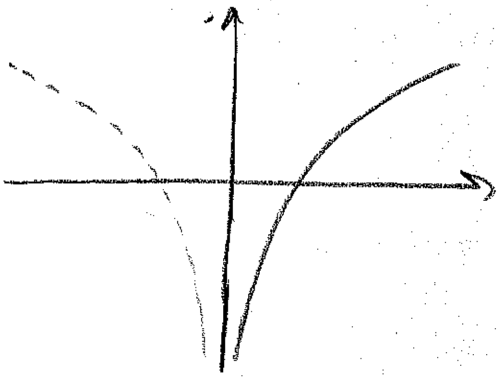
$\int x^{s-1} dx = \frac{1}{s} x^s + \frac{1}{s} C_1$, $r = s-1$, $s = r+1$

$\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$ $\quad \left(\frac{1}{r+1} C_1 = C \right)$

6)

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$





$x > 0$: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$x < 0$: $\ln|x| = \ln(-x)$

$$(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

Altså: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Oppsummert

1) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2) $\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

3) $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$

4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

6) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

7) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

8) $\int e^x\,dx = e^x + C$

④ Eksempel 1

Rekn ut desse ubestemte integrala

($\boxed{?}$ Kva reglar brukar vi?)

a) $\int (x^3+2)\,dx$

b) $\int \sin t\,dt$

c) $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int (e^x + 3x)\,dx$

e) $\int e^{3x}\,dx$

f) $\int \frac{x^3-3x+2}{x}\,dx$

---

a) $\int (x^3+2)\,dx \overset{1)}{=} \int x^3\,dx + \int 2\,dx \overset{3)}{=}$
$\underline{\frac{1}{4}x^4 + 2x + C}$

b) $\int \sin t\,dt \overset{4)}{=} -\cos t + C$

c) $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx =$
$\int (x^{3/2} + 2\cdot x^{-1/2})\,dx \overset{1),\,2)}{=} \int x^{3/2}\,dx + 2\int x^{-1/2}\,dx \overset{3)}{=}$

$$\frac{1}{3/2+1}\,x^{3/2+1} + 2\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\,x^{-1/2+1} + C =$$

$$\frac{1}{\frac{5}{2}}\,x^{5/2} + 2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\,x^{1/2} + C' =$$

$$\underline{\frac{5}{2}\,x^{5/2} + 4\sqrt{x} + C}$$

d) $\int (e^x+3x)\,dx \overset{1),2)}{=} \int e^x\,dx + 3\int x\,dx \overset{8)}{=} e^x + 3\cdot\frac{1}{2}x^2 + C' =$

$\underline{e^x + \frac{3}{2}x^2 + C}$

e) NB: Litt prematurt!

$$\int e^{3x}\,dx$$

$$(e^{3x})' \overset{\boxed{?}}{=} e^{3x}\cdot 3 = 3e^{3x}$$

$$\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' = \frac{1}{3}\cdot(e^{3x})' = \frac{1}{3}\cdot 3\,e^{3x} = e^{3x}$$

Altså:

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

$\boxed{?}$

f) $\int \frac{x^3-3x+2}{x}\,dx = \int \left(x^2-3+\frac{2}{x}\right)dx \overset{1),2)}{=}$

$\int x^2\,dx - \int 3\,dx + 2\cdot\int \frac{1}{x}\,dx \overset{3),7)}{=}$

$\underline{\frac{1}{3}x^3 - 3x + 2\cdot\ln|x| + C}$

(5) Eksempel 2

Om ein funksjon $f(x)$ veit vi at han har bunnpunkt i origo, $f(1)=1$ og $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$. Bestem f.

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int\left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)dx =$$

$$-\frac{1}{4}\int x^{-3/2}dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-3/2+1} + C' =$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}}x^{-1/2} + C' = \frac{1}{2}x^{-1/2} + C'$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{1}{2}\int\left(x^{-1/2} + C'\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-1/2+1} + C'\cdot x + \underset{\boxed{?}}{D} = \sqrt{x} + C'x + D$$

Origo: $f(0)=0$

$$\sqrt{0} + C'\cdot 0 + D = 0$$

$$D = 0$$

$f(1) = 1$

$$\sqrt{1} + C'\cdot 1 + 0 = 1$$

$$C' = 0$$

$$\underline{\underline{f(x) = \sqrt{x}}}$$