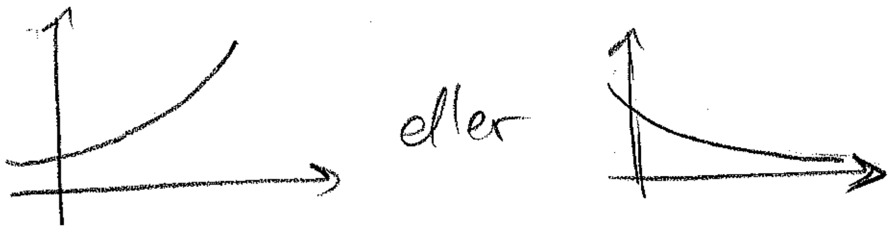
Førelesing 15/3

(1) Generell eksponentialfunksjon:

$$f(x) = k \cdot a^x$$

også: $f(x) = k \cdot e^{bx}$ } $\boxed{?}$ Same uttrykk?



$\boxed{?}$ Når?

$a > 1$ $\qquad$ $a < 1$

$b > 0$ $\qquad$ $b < 0$

$$a = e^{\ln a}$$

$$\Rightarrow k a^x = k \cdot (e^{\ln a})^x = k \cdot e^{\ln a \cdot x}$$

med $b = \ln a$: $\quad k a^x = k \cdot e^{bx}$

② Eksempel på drøfting med ein eksponentialfunksjon.

Gitt funksjonen $g(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 6\right)e^{x/2}$

a) Finn eventuelle nullpunkt for g

b) Finn eventuelle ekstremalpunkt

c) Bestem konkavitetseigenskapene til g.

d) Har g nokon asymptote? (ikkje pensumrelevant)

a) $g(x) = 0$

$$\left(\frac{x^2}{2} - 3x + 6\right)e^{x/2} = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 6 = 0 \quad \text{eller} \quad e^{x/2} = 0$$

$e^{x/2}$ er alltid positiv

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 6 = 0$$

$$x^2 - 6x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$\sqrt{-12}$ er ikkje definert; g har ingen nullpunkt.

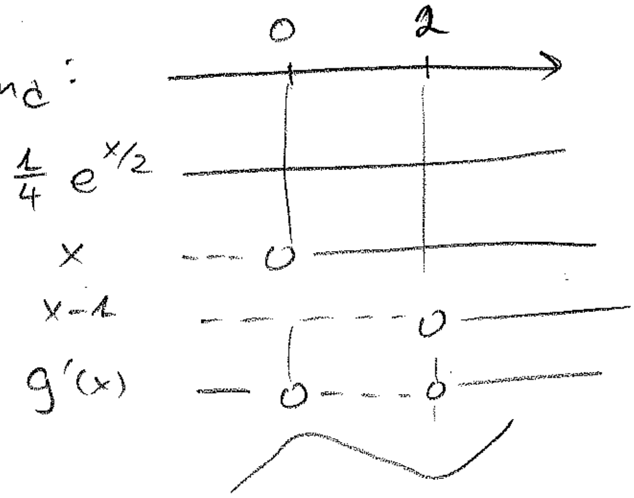
b) $g'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 6\right)' \cdot e^{x/2} + \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 6\right) \cdot \left(e^{x/2}\right)' =$

$\left(\frac{1}{2} \cdot 2x - 3\right) \cdot e^{x/2} + \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 6\right) \cdot e^{x/2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' =$

$e^{x/2}\left(x - 3 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 3x + 6\right)\right) = e^{x/2}\left(x \cancel{-3} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + \cancel{3}\right) =$

$e^{x/2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} e^{x/2}\left(x^2 - 2x\right) = \frac{1}{4} e^{x/2} x(x-2)$

Forteiknskjema:



$g(0) = \left(\frac{0^2}{2} - 3 \cdot 0 + 6\right) e^{0/2} = 6$

$g(1) = \left(\frac{2^2}{2} - 3 \cdot 2 + 6\right) e^{2/2} = 2e$

Toppunkt: $(0, 6)$

Botnpunkt: $(1, 2e)$

c) $g'(x) = \frac{1}{4} e^{x/2}\left(x^2 - 2x\right)$

$g''(x) = \frac{1}{4}\left(\left(e^{x/2}\right)' \cdot \left(x^2 - 2x\right) + e^{x/2} \cdot \left(x^2 - 2x\right)'\right) =$

$\frac{1}{4}\left(e^{x/2} \cdot \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x\right) + e^{x/2}\left(2x - 2\right)\right) =$

$\frac{1}{4} e^{x/2}\left(\frac{x^2}{2} - x + 2x - 2\right) = \frac{1}{4} e^{x/2}\left(\frac{x^2}{2} + x - 2\right) =$

$\frac{1}{8} e^{x/2}\left(x^2 + 2x - 4\right)$

Faktoriserar:

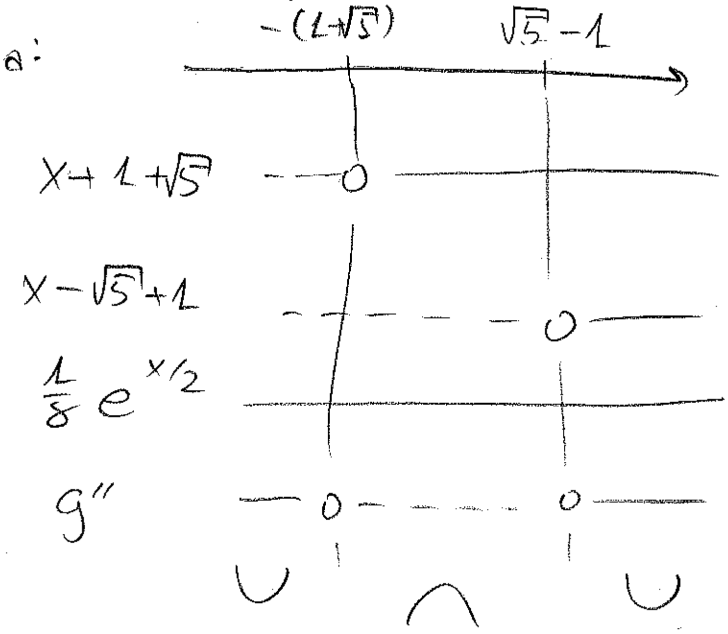
$$x^2+2x-4=0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$x^2+2x-4 = (x-(-1-\sqrt{5}))\,(x-(-1+\sqrt{5})) =$$

$$(x+1+\sqrt{5})\,(x-\sqrt{5}+1)$$

Forteiknskjema:



Grafen har konkavitet opp når $x < -(1+\sqrt{5})$ og når $x > \sqrt{5}-1$ og konkavitet ned når $-(1+\sqrt{5}) < x < \sqrt{5}-1$.

Studerar grafen i GeoGebra; stemmer det vi ser med det vi har funne ut?

$\boxed{?}$ Kva skjer når $x \to \infty$?

$$g(x) \to \infty$$

$\boxed{?}$ Kva skjer når $x \to -\infty$?

$$g(x) \to 0$$

<u>$y=0$</u> er ein horisontal asymptote for g

(3) Antiderivasjon – det motsette av å derivere (15.1)

[?] Dersom $F'(x) = x$, kva er $F(x)$?

Veit at $(x^2)' = 2x$

$$\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2}\cdot(x^2)' = \frac{1}{2}\cdot 2x = x$$

Altså: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$?

Kva med $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$?

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + 5' = \frac{1}{2}\cdot 2x + 0 = x$$

Fart og strekning

Farten til ein bil er gitt ved ein funksjon $v(t)$ der v er farten i m/s etter t sekund. Kor langt har bilen køyrd mellom $t=0$ og $t=5$?

Hugsar: Fart er den deriverte av tilbakelagt strekning, $v(t) = s'(t)$

Altså: $s(t)$ er ein antiderivert av v

Anta at $V(t)$ er slik at $V'(t) = v(t)$

[?] Er då $s(t) = V(t)$?

Nei, ikkje nødvendigvis – det kan vere ein konstant i skilnad;

$$S(t) = V(t) + C$$

$$\uparrow$$

konstant, $C' = 0$

Men: Strekninga vi har køyrd mellom $t=0$ og $t=5$ kan vi finne:

$$S(5) - S(0) = V(5) + C - (V(0) + C) =$$

$$V(5) + C - V(0) - C = \underline{V(5) - V(0)}$$

Vi tenkjer oss at vi veit at når $t=0$, har vi køyrd strekninga S_0

[?] Korleis kan vi no finne $S(t)$?

Veit: $S(0) = S_0$

Altså: $V(0) + C = S_0$

$C = S_0 - V(0)$

– Dette bestemmer C.

Eksempel

Ein dragster-bil har ein akselerasjon på $3g$ der g er tyngdeakselerasjonen ($9{,}8\ m/s^2$). Ved tida $t=0$ har bilen køyrd $15\ m$. Farten er då

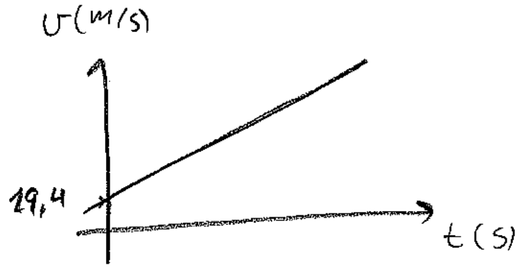
70 km/h = 19,4 m/s. Ved konstant akselerasjon a, aukar farten linedert som $v(t) = v_0 + at$.
Finn ein funksjon for kor mange meter s bilen har køyrd etter t sekund.

$a = 3g$

I m/s²: $a = 3 \cdot 9{,}8 = 29{,}4$

$v_0 = 19{,}4$

$v(t) = 19{,}4 + 29{,}4 \cdot t$



Veit: $v(t) = s'(t)$

Antiderivert av v: $19{,}4 \cdot t + 29{,}4 \cdot \frac{1}{2} t^2 + C$

Altså: $s(t) = 19{,}4t + \frac{1}{2} \cdot 29{,}4 \cdot t^2 + C =$

$19{,}4t + 14{,}7t^2 + C$

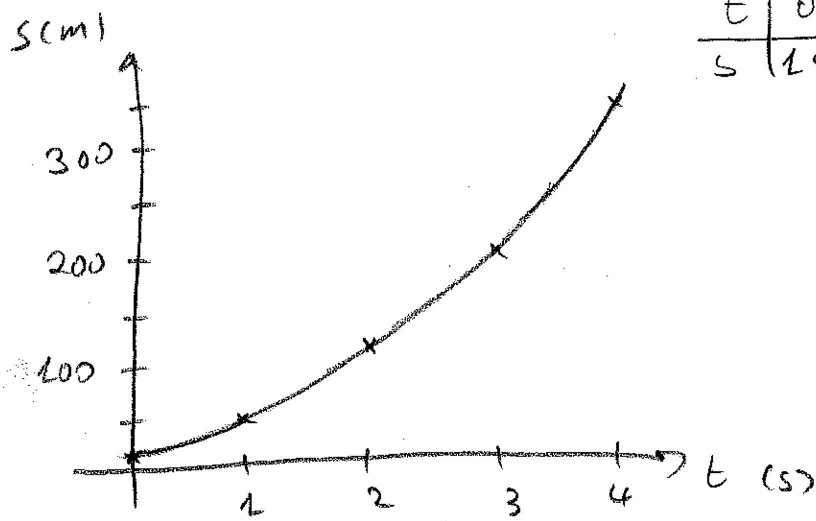
Veit: $s(0) \overset{\boxed{?}}{=} 15$

$19{,}4 \cdot 0 + 14{,}7 \cdot 0^2 + C = 15$

$C = 15$

Får $s(t) = 15 + 19{,}4 \cdot t + 14{,}7t^2$

t	0	1	2	3	4
s	15	49	113	205	328



Eksempel

Finn alle antideriverte til $f(x) = x^2 + 3x - 1$

$\boxed{?}$ Kva type funksjon må F vere dersom $F'(x) = f(x)$?

– Eit 3.-grads polynom

Ser: $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

$\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x \Rightarrow \left(3 \cdot \frac{1}{2}x^2\right)' = 3 \cdot x$

$(-x)' = -1$

$(C)' = 0$

Altså: $\underline{F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C}$ fordi

$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x + \frac{3}{2} \cdot 2x - 1 + 0 = f(x)$