Førelesing 12/4

① Rep. - Følger

- Aritmetiske følger

② Geometriske følger (sjå notat frå 11/4)

③ Rekkjer (17.4)

Rekker er meir eller mindre lange summar av tal:

$1+2+3+4+\ldots$

$7+8+\pi+\left(-\frac{1}{8}\right)+19+\sqrt{2}$

[?] Kva er skilnaden på dette og ei følge?

- Det står pluss mellom; vi summerar ledda.

Generelt:

sigma

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

④ Eksempel

Finn desse summane:

a) S_5 når $a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$

b) $\sum_{i=1}^{10} i$

c) $\sum_{i=0}^{4} 2^i$

a) $a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$

$a_1 = 2 + 0\cdot 3 = 2$

$a_2 = 2 + 1\cdot 3 = 5$

$a_3 = 2 + 2\cdot 3 = 8$

$a_4 = 11$

$a_5 = 14$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 15 + 25 = \underline{\underline{40}}$

b) $\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \underline{\underline{55}}$

c) $\sum_{i=0}^{4} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = \underline{\underline{31}}$

(5) Kvifor er rekkjer interessante?

- Fleire grunnar

Ein grunn: Taylor-utvikling

Poeng: Polynom er ofte enklare å ha med å gjere enn andre funksjonar.

Dersom $f(x)$ kan deriverast tilstrekkeleg mange gongar om $x=c$:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(n)}(c)\,(x-c)^n \quad , \quad i! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot i$$

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$
$\vdots$

Med $c=0$:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2} f''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{6} f'''(0) x^3$$

Eksempel:

McLauren-polynom for $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \ldots$$

$\longrightarrow$ Geogebra

NB: Ikkje pensum!

⑥ Aritmetiske rekkjer (17.5)

Aritmetiske rekkjer er det vi får når vi summerar ledda i ei aritmetiske følge.

Eksempel på aritmetisk følge:

$-3, -1, 1, 3, 5, \ldots$

? Kva er differansen d her?

$\underline{d=2}$

Tilsvarande aritmetisk rekkje:

$-3+(-1)+1+3+5+\ldots$

⑦ Eksempel

Gitt ei aritmetisk rekkje med $a_1=5$ og differanse $d=4$,

a) finn dei 5 fyrste ledda i rekka.

b) Finn S_5

c) Finn S_{10}

d) Finn S_n gitt at n er eit partal.

a) Aritmetisk rekkje:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ eller $a_n = a_{n-1} + d,\ a_1 = 5$

$a_1 = 5$

$a_2 = 5+4 = 9$

$a_3 = 9+4 = 13$

$a_4 = 13+4 = 17$

$a_5 = 17+4 = 21$ //

Merk: Denne måten å gjere det på er sårbar for følgefeil.

b) $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5+9+13+17+21 =$

? Kva vert $5+21$?

– og $9+17$?

$S_5 = 2\cdot 26 + 13 = 52 + 13 = \underline{\underline{65}}$

c) $S_{10} = 5+9+13+17+21+25+29+33+37+41$

? Kva vert $5+41$?

– og $9+37$?

– og $13+33$?

? Kor mange slike 46-par har vi?

$\frac{10}{2} = 5$

Altså: $S_{10} = 5 \cdot 46 = \underline{\underline{230}}$

d) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$a_1 + a_n = 5 + (5 + (n-1) \cdot 4) = 5 + 5 + 4n - 4 = 6 + 4n$

$a_2 + a_{n-1} = 5 + 4 + (5 + (n-2) \cdot 4) = 9 + 5 + 4n - 8 = 6 + 4n$

$a_3 + a_{n-2} = 5 + 2 \cdot 4 + (5 + (n-3) \cdot 4) = 13 + 5 + 4n - 12 = 6 + 4n$

etc.

Vi har $\frac{n}{2}$ par som alle blir $a_1 + a_n = 6 + 4n$

$\Rightarrow \quad S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot (6 + 4n) = n(3 + 2n) =$

$\underline{\underline{2n^2 + 3n}}$

④ Summen av ei aritmetiske rekkje

- Ut frå same resonnementet som i eksempelet, er summen av n element i ei aritmetiske rekkje gitt ved

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

- Formelen gjeld også når n ikkje er eit partal.

Eksempel

Summen av dei n fyrste ledda av ei aritmetisk rekke er -258. $a_1 = 5$, differansen er $-\frac{1}{2}$.

a) Finn n.

b) Kontrollér svaret på kalkulator.

---

a) $S_n = -324$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 5 + (n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} =$$
$$-\frac{n}{2} + \frac{11}{2}$$

$$S_n = \frac{n\cdot\left(5 + \left(-\frac{n}{2} + \frac{11}{2}\right)\right)}{2} = \frac{n\left(-\frac{n}{2} + \frac{21}{2}\right)}{2} =$$
$$-\frac{n^2}{4} + \frac{21}{4}n$$

$$S_n = -324$$

$$-\frac{n^2}{4} + \frac{21}{4}n = -324$$

$$-\frac{n^2}{4} + \frac{21}{4}n + 324 = 0$$

$$-n^2 + 21n + 1296 = 0$$

$$n = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4\cdot(-1)\cdot 1296}}{2\cdot(-1)} = \frac{21 \mp \sqrt{5625}}{2} = \frac{21 \mp 75}{2}$$

$$n = \frac{21-75}{2} = -27 \quad \vee \quad n = \frac{21+75}{2} = 48$$

n må vere positiv.

$\underline{\underline{n = 48}}$