Forelesing 10/3

1. Presisering i.h.t. konstantar vs. variablar i oppg. 4 i obligen

2. Fullføre eksempel med mjølkekartong frå tysdag.

3. Kjerneregel og Leibniz-notasjon.

Poeng: Av og til må vi bruke kjerneregelen fleire gonger for å derivere ein funksjon. Då er ofte Leibniz-notasjon den mest praktiske. Vi viser dette med nokre eksempel.

Deriver desse funksjonane:

a) $f(x) = \ln(x^2+1)$

b) $f(x) = \ln(\cos(x^2)+2)$

c) $f(x) = \sin(\ln(\cos(x^2)+2))$ ($\rightarrow$ GeoGebra?)

a) $f(x) = \ln(x^2+1)$

$u(x) = x^2+1$

1) $f(x) = g(u(x))$ der $g(u) = \ln u$

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{u} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2+1}}}$

2) $f(x) = \ln u(x)$

$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

b) $f(x) = \ln(\cos(x^2)+2)$

$u(x) = \cos(x^2)+2$

$f(x) = \ln u(x)$

$v = x^2$

$u(x) = \cos v + 2$

$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-\sin v) \cdot 2x =$

$\underline{\underline{- \frac{2x \sin(x^2)}{\cos(x^2)+2}}}$

c) $f(x) = \sin(\ln(\cos(x^2)+2))$

$u(x) = \ln(\cos(x^2)+2)$

$f(x) = \sin u$

$v = \cos(x^2)+2$

$u(x) = \ln v$

$w = x^2$

$v = \cos w + 2$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

Poeng: På engelsk heiter lekjerneregelen „kjederegelen" (the chain rule).

$$\frac{df}{dx} = \cos u \cdot \frac{1}{v} \cdot (-\sin w + 0) \cdot 2x =$$

$$\cos(\ln(\cos(x^2)+2)) \cdot \frac{1}{\cos(x^2)+2} \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x =$$

$$- \frac{2x \sin(x^2) \cos(\ln(\cos(x^2)+2))}{\cos(x^2)+2}$$

NB: Neppe ei eksamensrelevant derivering.
Poenget var å vise at lekjerneregelen er ganske kraftig

↳ GeoGebra.

(4) Bevis for at $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)$$

$$u = \frac{h}{x} \iff h = u \cdot x$$

$$h \to 0 \implies u \to 0 \quad (x \neq 0)$$

$$f'(x) = \lim_{u\to 0} \left(\frac{1}{u \cdot x} \ln(1+u)\right) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{u \to 0} \left(\frac{1}{u} \ln(1+u)\right) =$$

$$\frac{1}{x} \cdot \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}}$$

Sjekk på kalkulatorane

u	$\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}$
1	$0,693$
$\frac{1}{2}$	$0,811$
$0,1$	$0,953$
$0,01$	$0,995$
10^{-6}	$0,99999995$

Ser ut til at $\lim\limits_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = 1$

$\boxed{?}$ Kvifor?

$\ln x$ er ein kontinuerleg funksjon. Difor har vi lov til å byte om rekkefølga på „ln" og „$\lim\limits_{u\to 0}$":

$$\lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \ln \underbrace{\left(\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right)}_{\boxed{?}}$$

Definisjon av e, $e = \lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}$

Altså:

$$f'(x) = \frac{1}{x}\cdot \ln e = \frac{1}{x} \qquad (q.e.d.)$$

5 Eksempel

Finn toppunktet til funksjonen

$f(x) = \ln(-x^2+4x+5)$

$u = -x^2+4x+5$

$f = \ln u$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot(-2x+4) = \frac{-2x+4}{-x^2+4x+5} = \frac{-2(x-2)}{-x^2+4x+5}$$

Faktorisering:

$$-x^2+4x+5=0$$

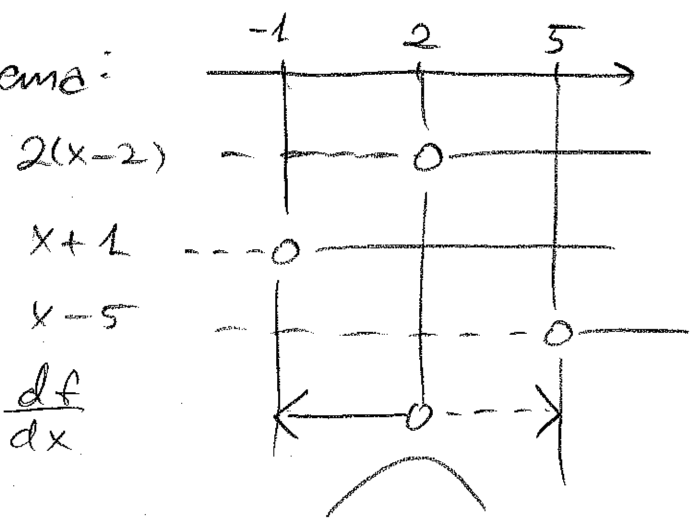
$$x = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot 5}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4\pm 6}{-2} = 2\mp 3$$

$$x = 2-3=-1 \quad \vee \quad x = 2+3 = 5$$

$$\Rightarrow \quad -x^2+4x+5 = -(x+1)(x-5)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-2(x-2)}{-(x+1)(x-5)} = \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)}$$

Fortegnsskjema:



Ser: $\ln(u(x))$ har topp der $u(x)$ har topp

$$f(2) = \ln(-2^2+4\cdot 2+5) = \ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3$$

Toppunkt: $\underline{(2, 2\ln 3)}$

Ein ting til:

$\ln u$ er berre definert når $u > 0$
Vidare går $\ln u$ mot $-\infty$ når u går mot 0 (frå oversida);

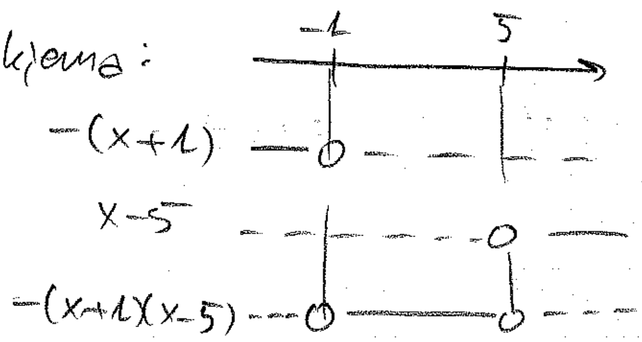
$\ln u \to -\infty$ når $x \to 0^+$

Altså: $\ln u$ har vertikale asymptotar for dei verdiane av x der $u(x) = 0$.

$$f(x) = \ln(-x^2+4x+5) = \ln(-(x+1)(x-5))$$

Ser $-(x+1)(x-5) = 0$ når $x=-1$ og når $x=5$
Altså er $x=-1$ og $x=5$ vertikale asymptotar for f.

Forteiknskjema:



Ser: $f(x)$ berre definert for $x \in \langle -1, 5\rangle$