Førelesing 9/10

① Opplegg:

I dag: - Litt om diff.-likningar
- Fortset med å repetere ved å rekne gjennom eksamen frå i fjor (lagt ut på Fronter).
- Fortset å repetere t.o.m. tys. 24. mai.

Men: Inga undervising man. 16. mai.
Bortreist resten av veke 21.

② Sannsynet for å vinne i lotto

- Skal trekke 7 kuler av 34.

Kor mange måtar kan vi gjere det på?

Kule 1: 34 måtar
" 2: 33 "

etc.

Alt i alt: $34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28$ måtar

Kor mange måtar kan vi velge rett rekke på?

Når vi kryssar av 1. tal: 7 måtar

— " — 2. " : 6 "

etc.

Alt i alt: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$ måtar.

$$P(\text{rett rekke}) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{5040}{2{,}7113 \cdot 10^{10}} = 1{,}86 \cdot 10^{-7} \approx \underline{\underline{\frac{1}{5 \cdot 10^{6}}}}$$

③ Om differensial-likningar

Har sett denne før:

$$N'(t) = -k \cdot N(t), \quad k > 0$$

Tidlegare har vi berre fått lysinga presentert. No skal vi finne ho.

Leibniz notasjon:

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N \quad \Big| \cdot dt$$

$$dN = -k \cdot N \cdot dt \quad \Big| : N$$

$$\frac{dN}{N} = -k \cdot dt$$

Poeng: Berre „N" på venstre side, berre „t". Vi har skild N og t; diff.-likninga er <u>separabel</u>.

No integrerar vi begge sider

$$\int \frac{dN}{N} = \int -k \cdot dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int \frac{1}{N}\, dN = \ln|N| + C_1$$

$$\int -k \cdot dt = -k \cdot \int 1 \cdot dt = -k \cdot t + C_2$$

Altså: $\ln|N| = -kt + C_3$

$$|N| = e^{-kt + C_3} = e^{C_3} \cdot e^{-kt}$$

$$N = \pm e^{C_3} e^{-kt}$$

$$N(t) = C e^{-kt}, \quad C = \pm e^{C_3}$$

- Vi treng meir informasjon; diff.-likninga aleine er ikkje nok til å bestemme $N(t)$.

Krav: $N(0) = N_0$ (initialkrav) $(N_0 > 0)$

Altså $N(t) = C e^{-kt}$

$$N(0) = N_0$$

$$C e^{-k \cdot 0} = N_0$$

$$C = N_0$$

Altså: $\boxed{N(t) = N_0 e^{-kt}}$

④ Fritt fall (utan luftmotstand)

Når vi slepp ein stein, får den akselerasjonen $g = 9{,}81 \, m/s^2$ nedover. Om $y(t)$ er så langt steinen har falt etter tida t, har vi at

$m a = m g$, m: massen

$a = g$

Husk: Akselerasjon er den deriverte

av farten, $a(t) = v'(t)$. Videre: Farten er den deriverte av strekninga, $v(t) = y'(t)$.

Altså: $a(t) = v'(t) = y''(t)$.

$$y''(t) = g$$

– Relativt enkel diff.-likning

$$y'(t) = \int y''(t)\,dt = \int g\,dt = gt + C_1$$

$$y(t) = \int y'(t)\,dt = \int (gt + C_1)\,dt = g \cdot \tfrac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

Altså: $y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$

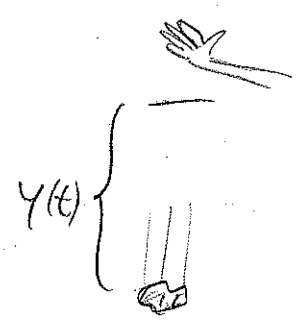
Posisjon ved $t=0$: $y(0) = \frac{1}{2}g \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2$

– Kallar denne y_0

Fart ved $t=0$: $v(t) = y'(t) = gt + C_1$

$v(0) = g \cdot 0 + C_1$

– Kallar denne v_0



Vi får:

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2}$$

Dersom vi tenkjer oss at vi startar i $y=0$ utan fart ($y_0 = 0$ og $v_0 = 0$):

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

⑤ Eksempel

a) Finn den generelle løysinga til differensiallikninga $y' - x^2 y^2 = 0$

b) Finn den løysinga som tilfredsstiller kravet $y(0) = 1$

a)
$$\frac{dy}{dx} - x^2 y^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = x^2 dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x^2 dx$$

$$\frac{1}{-2+1} y^{-2+1} = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{\frac{1}{3}x^3 + C}}}$$

Sjekk?

$$y' = -\left(-\left(\tfrac{1}{3}x^3 + C\right)^{-2}\right) \cdot \tfrac{3}{3} x^2 = \frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)^2}$$

$$y' - x^2 \cdot y^2 = y' - x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\frac{1}{3}x^3 + C}\right)^2 = \frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)^2} = 0$$

OK

b) $y(0) = 1$

$$-\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot 0^3 + C} = 1$$

$$-\frac{1}{C} = 1$$

$$C = -1$$

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^3}}}$$

(6) Begynne på eksamen frå i fjor.