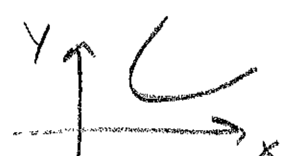
Førelesing 6/1 2011

(1) Praktisk info:

- Ny framdriftsplan .. (vise)
  Fleire obligar, kortare. Fyrste: Vektorar?
  Om oppgåvene
- Heildagsprøven
  Deler ut i pausa
  Nokon: Jobba for lite?
  Kom gjerne til meg med spørsmål
  Korreksjon til løysingsforslaget:
  1 b): $r = \ldots \rightarrow \sin v = \ldots$
  Om karakterar / bestått etc.
- Oppgåveark på Fronter.
- Timeplon

(2) $\boxed{?}$ Kva er ein funksjon

$\boxed{?}$ Om grafen til ein funksjon; kvifor kan ikkje dette vere grafen til ein funksjon:



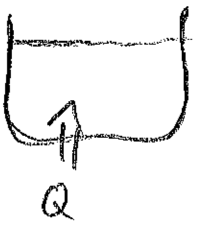
($\boxed{?}$ Kva kallar ein slikt om det ikkje er grafen til ein funk.?)

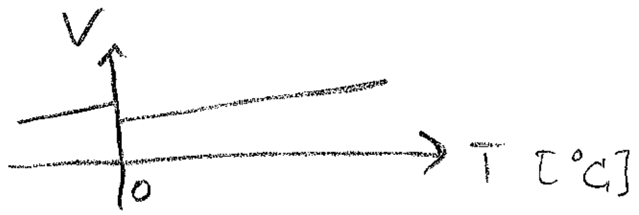
Kontinuerleg funksjon: Grafen „heng saman"

[?] Eksempel på diskontinuerlege funksjonar?

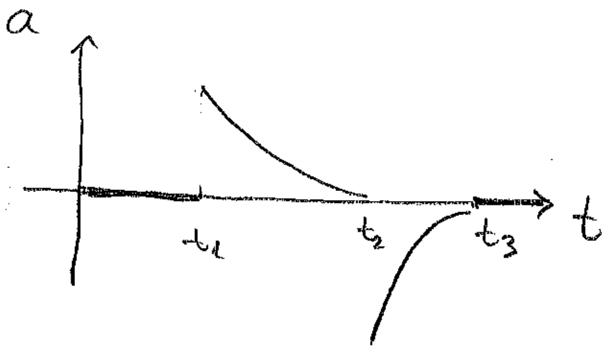
- Tabelltrekk for skatt; trekk som funksjon av inntekt

- Vatn som frys; volum som funksjon av temperatur $V(T)$





- Akselerasjonen til ein fallskjermhoppar; akselerasjon som funksjon av tid $a(t)$



[?] Kva skjer ved t_1, t_2 og t_3?

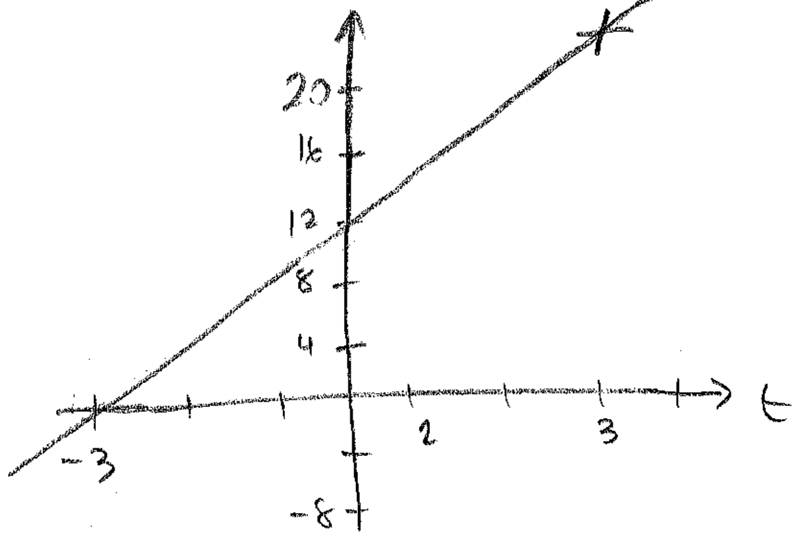
- $f(x) = \dfrac{4x^2 - 36}{x-3}$

Fyrst: På kalkulator

[?] Kvifor rett linje?

$$\frac{4x^2-36}{x-3} = \frac{4(x^2-9)}{x-3} = \frac{4(x+3)(x-3)}{x-3} \stackrel{?}{=} 4(x+3) = 4x+12$$

[?] Alltid sant? Nei, ikkje når $x=3$



Poeng: $f(3)$ eksisterar ikkje;
vi får ikkje lov til å dele med 0!

Grafen til $f(x)$ har eit „hol" for $x=3$; den er diskontinuerleg i $x=3$.

Allikevel: Ser at $f(x)$ nermar seg ein bestemt verdi når x nermar seg 3.

$x \to 3 \Rightarrow f(x) \to 4\cdot 3+12 = 24$

„ $f(x)$ går mot 24 når x går mot 3 "

Eller:

$\lim_{x \to 3} f(x) = 24$

– Grenseverdi

③ Eksempel

Finn grenseverdiane (dersom dei eksisterar)

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2+2)$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^3+8x^2+8x}{x^2-3x-10}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x-1}$

a) - Kan sette rett inn:

$\lim\limits_{x \to 2} (x^2+2) = 2^2+2 = \underline{\underline{6}}$ - Vis på kalkulator

b) Ser: Nemnaren blir 0 for $x=-2$:

$(-2)^2 - 3\cdot(-2) - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$

- Difor kan vi ikkje sette inn $x=-2$ og rekne ut.

Også teljaren blir 0 for $x=-2$:

$2\cdot(-2)^3 + 8\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) = -2\cdot 8 + 8\cdot 4 - 8\cdot 2 = 0$

Altså: $x+2$ er faktor i begge

Nemnaren:

$$
\begin{array}{l}
(x^2-3x-10) : (x+2) = x-5 \\
\underline{-(x^2+2x)} \\
\quad -5x-10 \\
\quad \underline{-(-5x-10)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\boxed{?}$ Alternativ måte å faktorisere på

Teljaren:

$$2x^3+8x^2+8x = 2x(x^2+4x+4) \overset{\boxed{?}}{=} 2x(x+2)^2$$

Altså:

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^3+8x^2+8x}{x^2-3x-10} = \lim_{x\to -2} \frac{2x(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+2)}(x-5)} =$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x(x+2)}{x-5} = \frac{2\cdot(-2)\cdot(-2+2)}{-2-5} = \underline{\underline{0}}$$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1}$

Teljaren blir 2 for $x=1$, nemnaren blir 0 for $x=1$.

$\boxed{?}$ Kva skjer då?

Definerar: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$f(1{,}1) = 21$

$f(1{,}01) = 201$

$f(1{,}001) = 2001$

$\vdots$

$f(0{,}9) = -19$

$f(0{,}99) = -199$

$f(0{,}999) = -1999$

$\vdots$

Dersom x går mot 1 ovanfrå, går f(x) mot uendeleg.

Dersom x går mot 1 nedanfrå, går f(x) mot <u>minus</u> uendeleg.

<u>Grenseverdien eksisterar ikkje.</u>

(4) Reknereglar for grenseverdiar

Dersom $\lim_{x \to a} f(x)$ og $\lim_{x \to a} g(x)$ eksisterar:

1) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

3) $\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$, k er ein konstant

4) Dersom $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Eksempel

Gitt at $\lim_{x \to 3} f(x) = 7$ og $\lim_{x \to 3} g(x) = 2$,

finn

a) $\lim_{x \to 3} (f(x) + g(x))$

b) $\lim_{x \to 3} (4 \cdot g(x))$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{2 \cdot g(x)}$

---

a) $\lim_{x \to 3} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 3} f(x) + \lim_{x \to 3} g(x) = 7 + 2 = \underline{\underline{9}}$

b) $\lim_{x \to 3} (4 \cdot g(x)) = 4 \cdot \lim_{x \to 3} g(x) = 4 \cdot 2 = \underline{\underline{8}}$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{2 \cdot g(x)} = \frac{\lim_{x \to 3} f(x)}{2 \cdot \lim_{x \to 3} g(x)} = \frac{7}{2 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{7}{4}}}$

(5) Definisjon av kontinuitet

Ein funksjon $f(x)$ er kontinuerleg for $x=a$ hvis og berre hvis $f(a)$ eksisterer og

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Eksempel

Funksjonen $g(x)$ er definert på denne måten:

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \quad \text{for alle } x \text{ utanom } x=2$$

og $g(2) = 5$.

a) Er $g(x)$ kontinuerleg for $x=1$?

b) Er $g(x)$ kontinuerleg for $x=2$?

c) Kva med alle andre verdiar for x utanom 2?