Førelesing 31/1

(1) Repetere kva eit vendepunkt er.
- Jmf. K-punkt i ein hoppbakke
- Om „Havet"

(3) Eksempel frå notat 25/1 - side 8.

(2) Eksempel om uttak av fisk frå notat 20/1 - side 5

Poeng: Maksimalt uttak når $N'(t)$ er maksimal - altså når $N''(t)=0$.

(4) Optimalisering

- Å bestemme parametrar slik at ein bestemt storleik får størst mogeleg verdi.

Eksempel

Ein sauebonde har rikeleg med mark til saubeite. Men han har berre 250 m gjerde. Han ynskjer å gjerde inn eit rektangulert område slik at det blir størst mogeleg.

a) Kor stort blir det arealet

b) Om han hadde vald å lage ei sirkelforma innhegning, kor stort areal hadde sauene fått å beite på då?

---

a) $\boxed{?}$ Tipp?

Kvadrat, altså sider på $\frac{250\text{m}}{4} = 62{,}5\text{m}$

Areal: $A = l \cdot b$

Skal ha: $2(l+b) = 250$

$l + b = 125$

$b = 125 - l$

$$A(l) = l \cdot (125 - l) = 125l - l^2$$

$$A'(l) = 125 - 2l = -2(l - 62{,}5)$$

Forteiknskjema:

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad\quad 62{,}5 \\
A'(l) & \text{———} \; 0 \; \text{- - -}
\end{array}
$$

Arealet $A(l)$ er størst når $l = 62{,}5$

$A(62{,}5) = 3906{,}25 \approx 3906$

Arealet blir då $\underline{3906 \, m^2}$

b) Omkrins av sirkel: $O = 2\pi r$

Radius: $r = \frac{O}{2\pi} = \frac{250\,m}{2\pi} = 39{,}79\,m$

Areal: $\pi r^2 = \pi \cdot (39{,}79\,m)^2 = 4973{,}6\,m^2 \approx \underline{4974\,m^2}$

Eksempel

Ein parabel er gitt ved funksjonen

$f(x) = -x^2$

a) Finn det punktet på parabelen som ligg nærast punktet $A(0, \frac{1}{2})$

$\rightarrow$ Geogebra

b) Finn det punktet på parabelen som ligg nærast punktet $B(0,3)$.

Ser på punktet $(0,b)$

Parabelen:

$$y = x^2$$

Punkt på parabel: $P(x,y) = (x, x^2)$

$$\vec{AP} = [x-0, y-b] = [x, x^2 - b]$$

Avstand: $d = |\vec{AP}| = \sqrt{x^2 + (x^2-b)^2}$

- Kan like gjerne se på $D = d^2$ som d:

$$D(x) = x^2 + (x^2-b)^2 = x^4 - (2b-1)x^2 + b^2$$

$$D'(x) = 4x^3 - 2(2b-1)x + 0 =$$
$$2x(2x^2 - 2b + 1) = 0$$

Skal ha at $D'(x) = 0$:

$x = 0$ eller $2x^2 - 2b + 1 = 0$

$$2x^2 - 2b + 1 = 0 \iff x^2 = b - \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{b - \frac{1}{2}}$$, krav: $b \geq \frac{1}{2}$

Når er D minst?

$$D(0) = b^2$$

$$D\left(\pm\sqrt{b-\frac{1}{2}}\right) = b - \frac{1}{2} + \left(b - \frac{1}{2} - b\right)^2 = b - \frac{1}{4}$$

a) $b = \frac{1}{2}$

$D(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$D\left(\pm\sqrt{b - \frac{1}{2}}\right) = D(0)$

Naermeste punkt på parabelen: $\underline{(0,0)}$ – origo

b) $b = 3$

$D(0) = b^2 = 3^2 = 9$

$D\left(\pm\sqrt{b - \frac{1}{2}}\right) = b - \frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

Ser: $D\left(\pm\sqrt{b - \frac{1}{2}}\right) < D(0)$

– Minst avstand når $x = \pm\sqrt{b - \frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3 - \frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

Naermeste punkt på parabelen: $\underline{\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right)}$