Førelesing 25/1

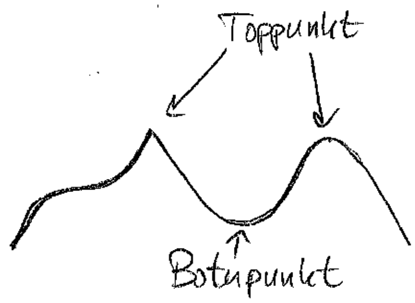
1 Rep.

[?] Kva „fasong" har grafen til f(x) dersom f(x) er kontinuerleg for alle x og f'(x) har dette forteiknskjemaet:

0 4 7 9

——o——x - - o——o- - -

-Noko slikt:



2 [?] Dersom vi har funne eit toppunkt, har vi då funne den største verdien funksjonen kan ha?

-Nei.

For det fyrste: -Kan ha fleire toppunkt.

Dessuten: Treng ikkje vere maksimal verdi sjølv om det er eit toppunkt.

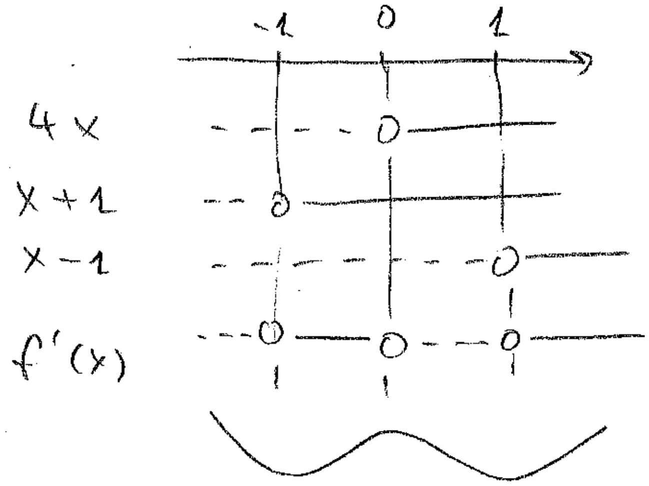
Størst og minst funksjonsverdi (9.4)

- Vi ser på funksjonen

$$f(x) = (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

Forteiknskjema:



→ Plottar i GeoGebra

Ser: $(0, f(0)) = (0,1)$ er eit toppunkt. Men $f(x)$ kan bli mykje større enn 1. Faktisk:

$f(x) \to +\infty$ når $x \to \pm\infty$.

$f(1)=1$ er berre eit lokalt maksimum

Ofte vil randpunkt vere ekstremalpunkt.

Eksempel

Funksjonen $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ er gitt.

a) Kva er den største mogele definisjonsmengda til f?

b) Skisser grafen til f.

c) Finn alle ekstremalpunkta til f.

a) – Kan ikkje ta kvadratrota av negative tal.

Må krevje: $4 - x^2 \geq 0$

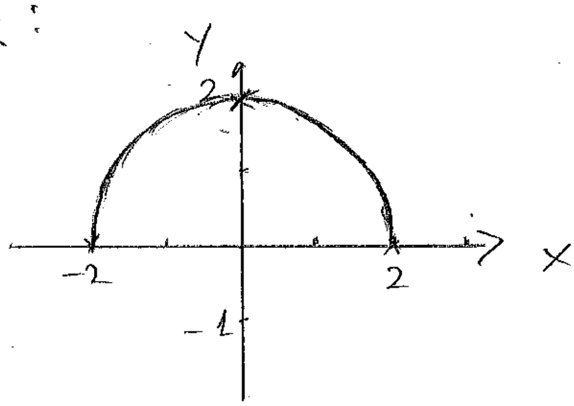
$x^2 \leq 4$

$-2 \leq x \leq 2$

Definisjonsmengd: $D_f = [-2, 2]$

b) – Grafen blir ein halvsirkel med radius 2:

$f(0) = 2$



$\boxed{?}$ $f'(\pm 2) = ?$

c) Av grafen ser vi at $(0,2)$ er eit toppunkt og at $(-2,0)$ og $(2,0)$ er botnpunkt.

Eksempel

Funksjonen $g(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 72x}{100}$

har definisjonsmengda $D_g = [-8, 7\rangle$

a) Kva ekstremalpunkt har g?

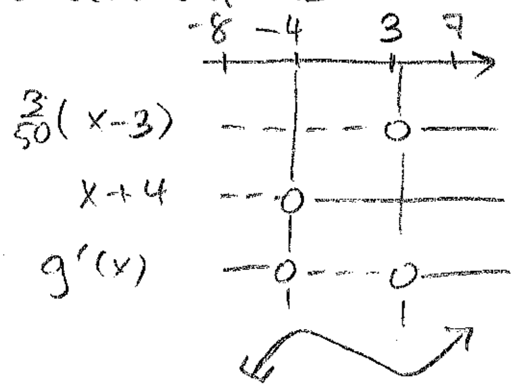
b) Kva er den lågaste verdien g kan ha?

→ GeoGebra

a) $g'(x) = \frac{1}{100}(2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 72) = \frac{1}{50}(3x^2 + 3x - 36) =$

$\frac{3}{50}(x^2 + x - 12) = \frac{3}{50}(x-3)(x+4)$

Forteiknskjema:



Botnpunkt for $x = -8$ og $x = 3$

Toppunkt for $x = -4$

? Kva med punktet kor $x \to 7^-$?

– Ikkje eit ekstremalpunkt

$$g(-8) = \frac{2\cdot(-8)^3 + 3\cdot(-8)^2 - 72\cdot(-8)}{100} = -\frac{64}{25} = -2{,}56$$

$$g(-4) = \frac{2\cdot(-4)^3 + 3\cdot(-4) - 72\cdot(-4)}{100} = \frac{52}{25} = 2{,}08$$

$$g(3) = \frac{2\cdot 3^3 + 3\cdot 3^2 - 72\cdot 3}{100} = -\frac{27}{20} = -1{,}35$$

$$\lim_{x \to 7^-} g(x) = \frac{2\cdot 7^3 + 3\cdot 7^2 - 72\cdot 7}{100} = \frac{329}{100} = 3{,}29$$

Toppunkt: $\underline{\underline{\left(-4, \frac{52}{25}\right)}}$

Botnpunkt: $\underline{\left(-8, -\frac{64}{25}\right)}$ og $\underline{\left(3, -\frac{27}{20}\right)}$

b) Den lågaste verdien g(x) kan ha er $\underline{\underline{-\frac{64}{25}}}$

③ Den andrederiverte (9.3, 9.6)

– Viser plott av $s(t)$, $v(t)$ og $v'(t) = ?$

↑ akselerasjon.

Poeng: $v'(t)$ er akselerasjon.

Hugsar: $v(t) = s'(t)$

Altså: $a(t) = (s'(t))' = s''(t)$

Akselerasjon er den dobbelt deriverte (med omsyn på tid) av strekninga s.

Eksempel: konstant akselerasjon:

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = s'(t) = v_0 + \frac{1}{2} a\, 2t = v_0 + at$$

$$s''(t) = v'(t) = 0 + a = \underline{a}$$

Akselerasjon: Seier korleis farten endrar seg

Generelt:

$f'(x)$ seier noko om korleis $f(x)$ endrar seg.

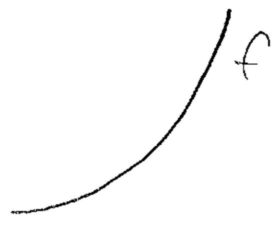
$f''(x)$ ——— " ——— $f'(x)$ — " — seg.

5 Krumming

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ aukar

$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ aukar

– Altså: $f(x)$ aukar brattare og brattare



$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ minkar

$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ aukar

Altså: $f'(x)$ er negativ og $|f'(x)|$ minkar

$f(x)$ avtar, men mindre og mindre bratt

I begge tilfeller: Grafen til f „smiler" og $f''(x) > 0$

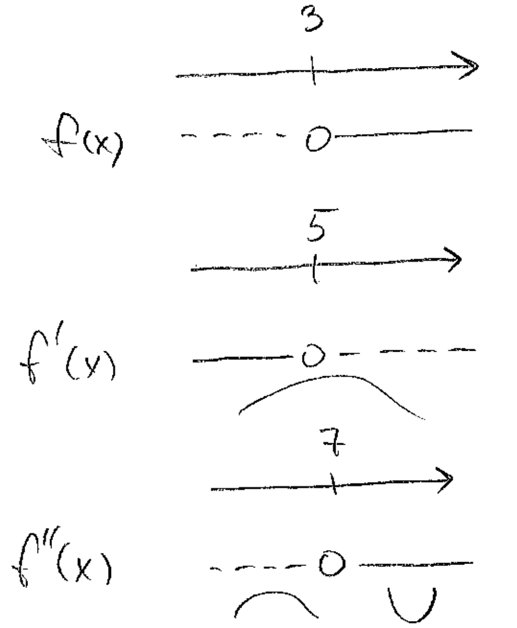
Når $f''(x) < 0$: Grafen „er sur"

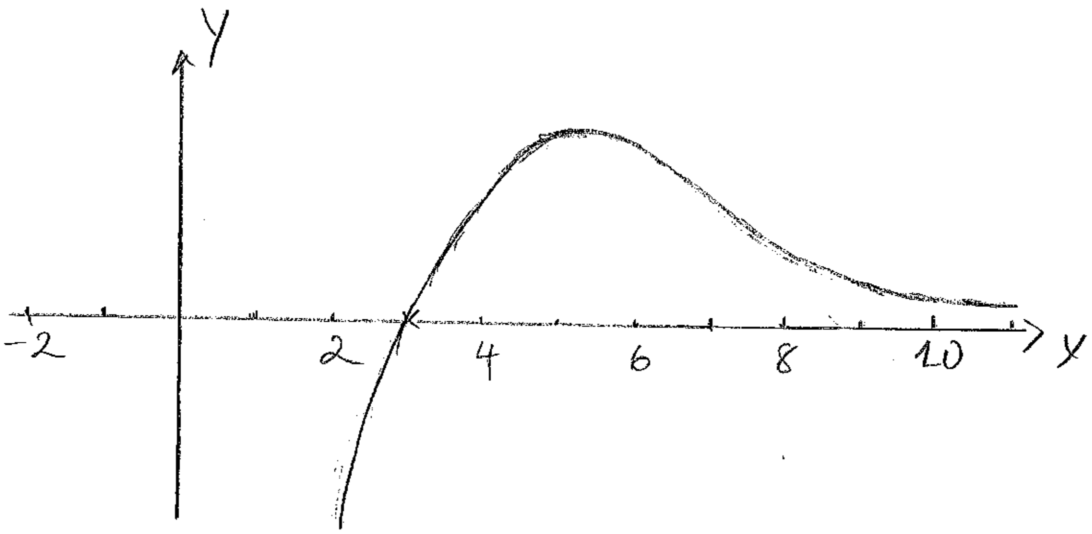
<u>Vendepunkt</u>: Der $f''(x)$ endrar forteiken

Tangenten til grafen til $f(x)$ <u>kryssar</u> grafen her.

Eksempel

Bruk desse forteiknskjema for $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$ til å „skissere" grafen til f.





6 Eksempel på vendepunkt:

K-punktet i ein hoppbakke (?)

- Vise bilete
- „Havet"