Førelesing 24/1

① Oblig: Løysingsforslag på Fronter

② Så langt: 3 derivasjonsreglar:

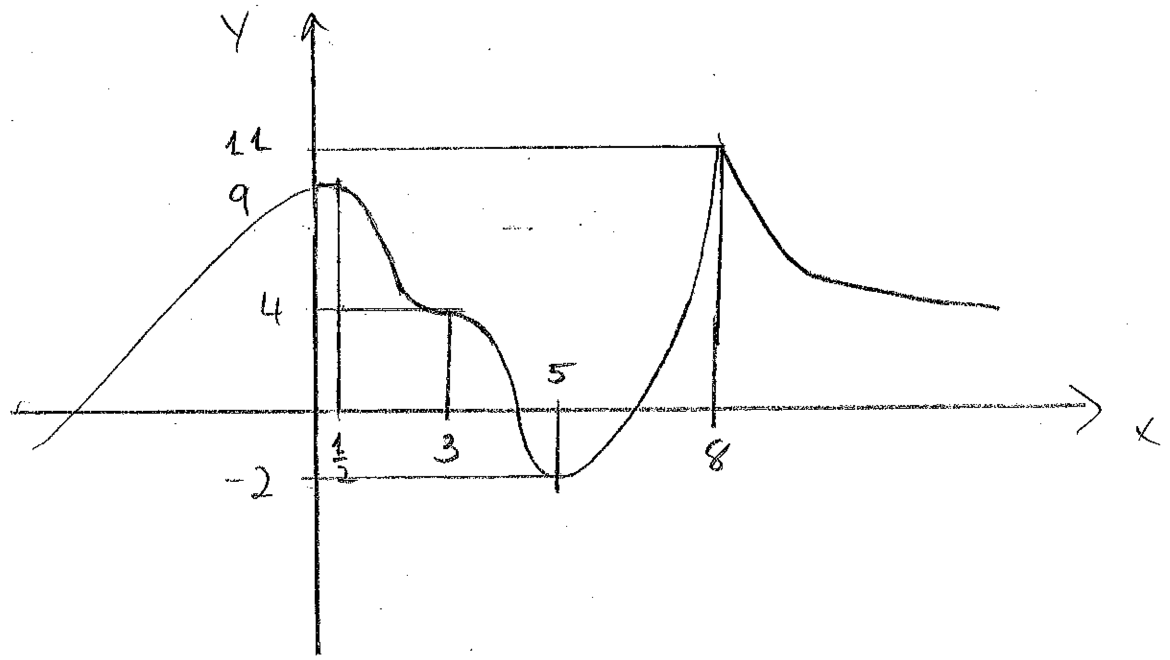
1) $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$

2) $(k\cdot u(x))' = k\cdot u'(x)$

3) $(x^r)' = r\,x^{r-1}$

③ Monotonieigenskaper og stasjonære punkt

Grafen til ein funksjon $f(x)$:



[?] Toppar og botnar:

Topp når $x = \frac{1}{2}$ og når $x = 8$

Botn når $x = 5$

[?] Kva med $f'(x)$

- Hugsar at $f'(x)$ er stigningstalet til tangenten i punktet $(x, f(x))$

[?] Kvar er $f(x)$ veksande?

$f(x)$ er veksande når

$x < -\frac{1}{2}$ og når $5 < x < 8$

Alternativt: når $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle$ og

når $x \in \langle 5, 8 \rangle$

Er $f'(x)$ positiv eller negativ her?

- positiv

Kvar er $f(x)$ avtakande?

Når $x \in \langle \frac{1}{2}, 5 \rangle$?

- $f(x)$ flatar ut for $x = 3$

Difor: $f(x)$ er avtakande når

$x \in \langle \frac{1}{2}, 3 \rangle$ og når $x \in \langle 3, 5 \rangle$

Kva forteikn har $f'(x)$ her?

- Minus

[?] Toppar?

Ja to, $(\frac{1}{2}, 9)$ og $(8, 12)$

[?] Kva med $f'(x)$ når $x = \frac{1}{2}$?

$f'(\frac{1}{2}) = 0$

[?] Kva med $f'(x)$ når $x = 8$

$\lim_{x \to 8^+} f'(x) \neq \lim_{x \to 8^-} f'(x) \Rightarrow f'(8)$ eksisterar ikkje.

I begge tilfeller:

$f'(x)$ endrar forteiken frå positiv til negativ.

[?] Botnar?

Ja, eitt: $(5, -2)$

Ser: $f'(5) = 0$

$f'(x)$ endrar seg frå negativ til positiv rundt $x = 5$

Også: $f'(3) = 0$

[?] Korleis endrar $f'(x)$ seg her?

– Frå negativ til negativ.

Oppsummert:

$f(x)$ er veksande når $x \in \langle a,b \rangle \Leftrightarrow$
$f'(x) > 0$ når $x \in \langle a,b \rangle$
$f(x)$ er avtakande når $x \in \langle a,b \rangle \Leftrightarrow$
$f'(x) < 0$ når $x \in \langle a,b \rangle$

Toppunkt: $f'(x)$ endrar forteikn frå positiv til negativ i punktet

Botnpunkt: $f'(x)$ endrar forteikn frå negativ til positiv i punktet

Stasjonært punkt: $f'(x) = 0$

I eksempelet:

Sadelpunkt

[?] Stasjonære punkt: $(\frac{1}{2}, 9)$, $(3,4)$, $(5,-2)$

Toppunkt: $(\frac{1}{2}, 9)$ og $(8, 11)$

Knekkpunkt

Botnpunkt: $(5,-2)$
[bunnpunkt]

Ekstremalpunkt: Topp- eller botnpunkt

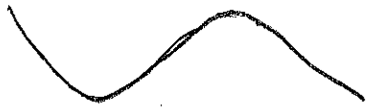
Monotonieigenskaper: Kvar $f(x)$ veks og minkar.

Gitt forteiknskjema for $f'(x)$:

		-2		4	
$f'(x)$	$- - -$	0	$——$	0	$- - -$

($f(x)$ kontinuerleg for alle x)

[?] Korleis ser grafen til $f(x)$ ut?



(4) Eksempel

Gitt funksjonen $h(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 3$

a) Finn monotoni-eigenskapene til h.

b) Finn eventuelle ekstremalpunkt.

c) Teikn grafen til h.

---

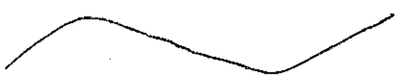
a) $h'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2x - 3 - 0 = x^2 + 2x - 3$

Nullpunkt for $h'(x)$: $x = -3$ og $x = 1$

$h'(x) = (x-1)(x+3)$

Forteiknskjema:

		-3		1	
$x-1$	$- - -$	$- -$	$- - -$	0	$——$
$x+3$	$- - -$	0	$——$	$——$	$——$
$h'(x)$	$——$	0	$- - -$	0	$——$



b) Av forteiknskjemaet ser vi at h har eit toppunkt for x = −3 og eit botnpunkt for x = 1

$$h(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + (-3)^2 - 3\cdot(-3) - 3 = 6$$

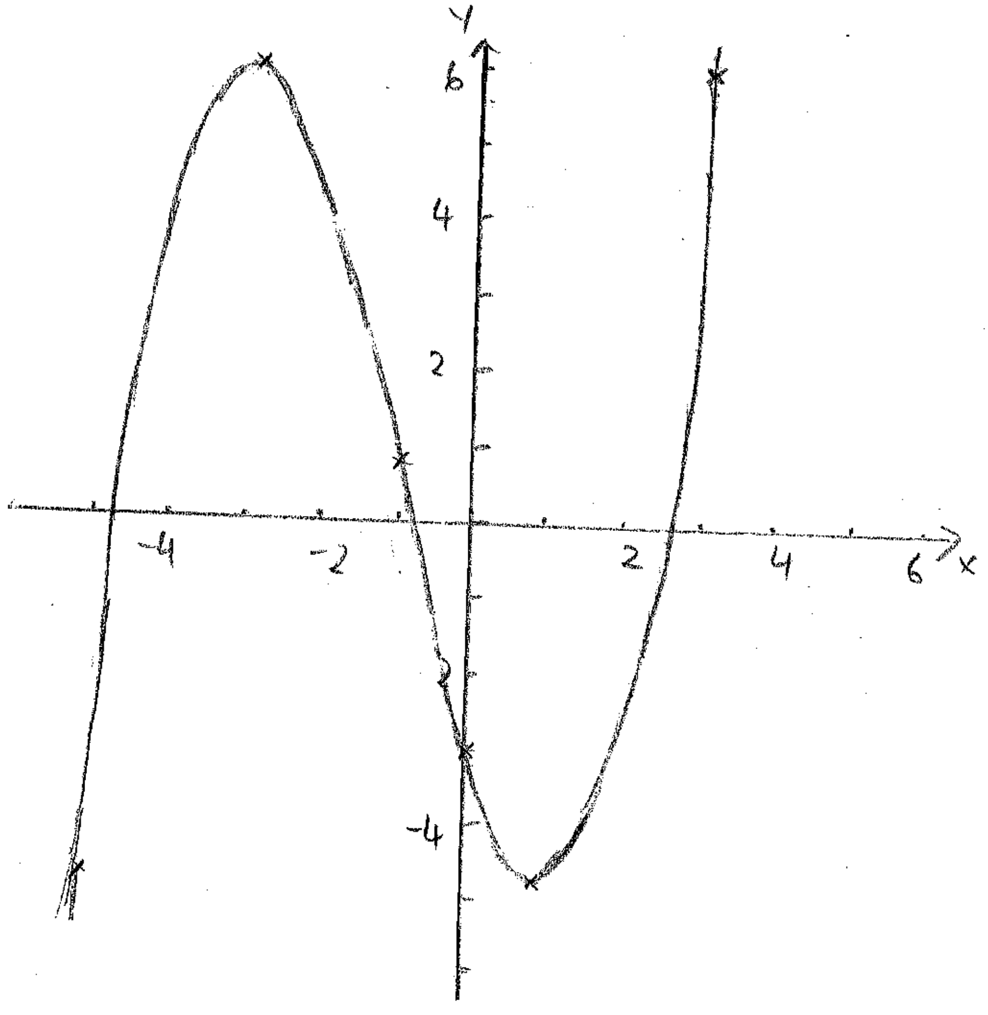
$$h(1) = \frac{1}{3} + 1 - 3 - 3 = \frac{1}{3} - 5 = -\underline{\frac{14}{3}} \approx -4{,}7$$

Toppunkt: $\underline{(-3, 6)}$

Botnpunkt: $\underline{(1, -\frac{14}{3})}$

c) Tabell:

x	-5	-3	-1	0	1	3
$h(x)$	$-4{,}7$	6	$0{,}7$	-3	$-4{,}7$	6



(5) Eksempel

Gitt $g(x) = x^2 - 10x + 30$

a) Finn monotonieigenskapane til g.

b) Bruk svaret i a) til å forklare kvifor likninga $g(x) = 0$ ikkje har noko løysing.

---

a) $g'(x) = 2x - 10 = 2(x-5)$

Forteiknskjema:

$$
\begin{array}{lccc}
 & & 5 & \\
g'(x) & - - - - & 0 & ——— \\
\end{array}
$$

g avtar når $x < 5$ og aukar når $x > 5$

b) Vi ser at $g(x)$ har lågast verdi når $x = 5$

$g(5) = 5^2 - 10 \cdot 5 + 30 = 5$

$g(x)$ blir aldri mindre enn 5 og kan difor aldri bli 0. Difor har likninga $g(x) = 0$ inga løysing.