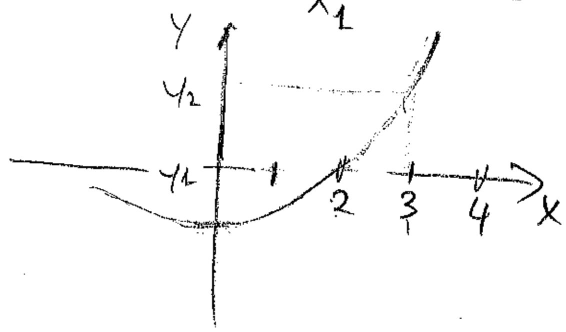
Førelesing 20/1

(0) Informere om oppdatert plan.

(1) Presisering om eksempel frå tysdag:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

– Finn gjennomsnittleg vekstfart i intervallet $[\underset{x_1}{2}, \underset{x_2}{3}]$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(2) Anna tidlegare eksempel (vart ikkje ferdig):

$$f(x) = 2x^3 - 16x^2 + 40x - 28$$

– Finn stigningstalet til tangenten i punktet $(1, f(1))$

– Følger notatet frå 18/1, side 5 og 6.

(3) Generelt:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x) \\ &2)\ (k \cdot u(x))' = k \cdot u'(x) \end{aligned}\right\}$$

Derivasjon er ein <u>lineær</u> operasjon

$\boxed{?}$ Bevis?

1) Set $f(x) = u(x) + v(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - (u(x)+v(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \right) \overset{\boxed{?}}{=} \text{ s. 266}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} =$$

$$u'(x) + v'(x) \qquad \square$$

2) $f(x) = k \cdot u(x)$

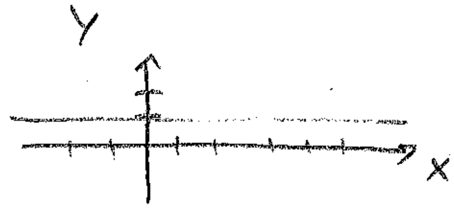
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot u(x+h) - k\cdot u(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} k \cdot \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \overset{\boxed{?}}{=} k \cdot \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} =$$

$$k \cdot u'(x) \qquad \square$$

3 $\boxed{?}$ $f(x) = 1$

$f'(x) = ?$



Hugsar: $x' = 1$

$(x^2)' = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$

$\vdots$

$(x^n)' = n\,x^{n-1}$

$\boxed{?}$ For kva n gjeld denne formelen? Gjeld det for $n=0$?

Ser: $f'(x) = 0$ når $f(x) = 1$

Også: $1 = x^0$

$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0 \qquad (\text{for } x \neq 0)$$

– Formelen stemmer også for $n = 0$

[?] Kva med negative n?
Stemmer det for $n = -1$?

Prøver:

$$g(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \cdot x(x+h)}{h \cdot x(x+h)} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{h\,x(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\,x(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} =$$

$$-\frac{1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

[?] Stemmer formelen $(x^n)' = n x^{n-1}$ for $n = -1$?

$$n \cdot x^{n-1} = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2}$$

Ja, det gjer han.

[?] Må n vere eit heiltal?

Kva med $n = 1/2$?

$$i(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \qquad (x \geq 0) \qquad (D_i = \boxed{?})$$

$$i'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}^2 - \sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Med formelen $(x^n)' = n x^{n-1}$ får vi:

$$i'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

– Formelen stemmer.

Kan vise: $(x^r)' = r x^{r-1}$ stemmer uansett kva r er

(4) Eksempel

Deriver desse funksjonane:

$a(x) = 3x^7$

$b(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3$

$c(x) = \sqrt{x} - 1$

$d(x) = \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[5]{x^7}$

$e(x) = x^{\pi}$

~~Løs~~

$a'(x) = 3\cdot(x^7)' = 3\cdot 7x^6 = \underline{\underline{21x^6}}$

$b'(x) = 5\cdot(x^3)' - 7\cdot(x^2)' + 3' = 5\cdot 3x^2 - 7\cdot 2x + 0 = \underline{\underline{15x^2 - 14x}}$

$c'(x) = (\sqrt{x})' - 1' = (x^{1/2})' - 0 = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$

$d'(x) = (x^{5/7})' + (x^{7/5})' = \frac{5}{7} x^{\frac{5}{7}-1} + \frac{7}{5} x^{\frac{7}{5}-1} =$

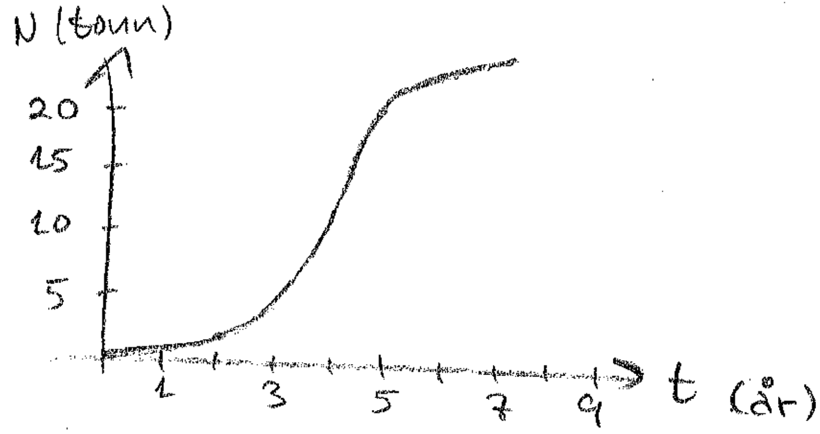
$\frac{5}{7} x^{-\frac{2}{7}} + \frac{7}{5} x^{\frac{2}{5}} = \underline{\underline{\frac{5}{7x^{2/7}} + \frac{7}{5} x^{2/5}}}$

$\ell(x) = \underline{\pi x^{\pi - 1}}$

(5) Kva brukar vi derivasjon til?

- Optimering / minimering
- Differensial-likningar

Eksempel



Ein fiskebestand har vore over-fiska, og må bygge seg opp att. Storleiken på stamma utviklar seg (i tid) slik figuren viser.

Kor stor bør bestanden vere for maksimalt utbytte?

- Finne den bestanden som tilsvarar at $N'(t)$ er maksimal – så sant N er stor nok til at stamma er trygg.