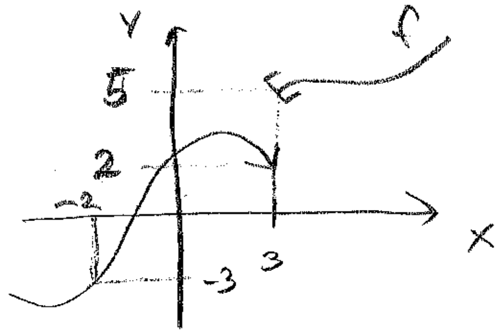
Førelesing 13/1

① Rep.



[?] Er $f(x)$ kontinuerleg for $x=-2$?

" " $x=3$

Kva er $f(3)$?

Kva er $\lim_{x\to 3^-} f(x)$?

Kva er $\lim_{x\to 3^+} f(x)$?

② Fullføre eksempel frå tysdag

$$b(x) = \frac{7x^7 - 3x^3 + x}{5x^7 - 7x^5}$$

$$d(x) = \frac{3x^2 + 3x - 18}{x-4}$$

- Finn alle horisontale asymptotar

$x \to \pm\infty$:

$$b(x) = \frac{(7x^7 - 3x^3 + x)\cdot \frac{1}{x^7}}{(5x^7 - 7x^5)\cdot \frac{1}{x^7}} = \frac{\frac{7x^7}{x^7} - \frac{3x^3}{x^7} + \frac{x}{x^7}}{\frac{5x^7}{x^7} - \frac{7x^5}{x^7}} =$$

$$\frac{7 - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^6}}{5 - \frac{7}{x^2}} \to \frac{7-0+0}{5-0} = \frac{7}{5}$$

$y = \frac{7}{5}$ er ein horisontal asymptote for $b(x)$

$\left(\lim_{x \to \pm\infty} b(x) = \frac{7}{5} \right)$

$x \to \pm\infty$:

$$d(x) = \frac{(3x^2+3x-18)\cdot\frac{1}{x}}{(x-4)\cdot\frac{1}{x}} = \frac{\frac{3x^2}{x} + \frac{3x}{x} - \frac{18}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}} = \frac{3x+3-\frac{18}{x}}{1-\frac{4}{x}} \to$$

$$\frac{3x+3-0}{1-0} = 3x+3 \to \pm\infty$$

$d(x)$ har ingen horisontale asymptotar.

Men: $d(x)$ har ein skrå asymptote

→ GeoGebra

? Korleis kan vi finne denne asymptoten?

- Polynomdivisjon.

→ Notat for 11/1, side 7

(3) Nytt eksempel:

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{-x^2+3x+34}{x^2-x-12} + 3$

a) Finn eit rasjonalt uttrykk for $f(x)$.

b) Finn nullpunkta til $f(x)$.

c) Finn alle asymptotar til $f(x)$.

d) Teikn grafen til $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{-x^2+3x+34}{x^2-x-12} + \frac{3(x^2-x-12)}{x^2-x-12} =$

$\frac{-x^2+3x+34+3(x^2-x-12)}{x^2-x-12} =$

$\frac{-x^2+3x+34+3x^2-3x-36}{x^2-x-12} = \underline{\underline{\frac{2x^2-2}{x^2-x-12}}}$

b) Nullpunkt: $f(x)=0$

$\frac{2x^2-2}{x^2-x-12} = 0 \quad | \cdot (x^2-x-12)$

$2x^2-2=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

Sjekkar om nemnaren er ulik 0 for $x=\pm 1$:

$x=-1$: $(-1)^2-(-1)-12=-10$

$x=1$: $1^2-1-12=-12$

Nullpunkta er $\underline{\underline{x=-1 \text{ og } x=1}}$

c) Finn nullpunkta til nemnaren:

$x^2-x-12=0$

$x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 7}{2}$

$x=\frac{1-7}{2}=-3 \quad \vee \quad x=\frac{1+7}{2}=4$

Når $x=-3$, er teljaren $2\cdot(-3)^2-2=16$

" $x=4$, —— " —— $2\cdot 4^2-2=30$

$\underline{\underline{x=-3 \text{ og } x=4}}$ er vertikale asymptoter

Når $x \to \pm\infty$:

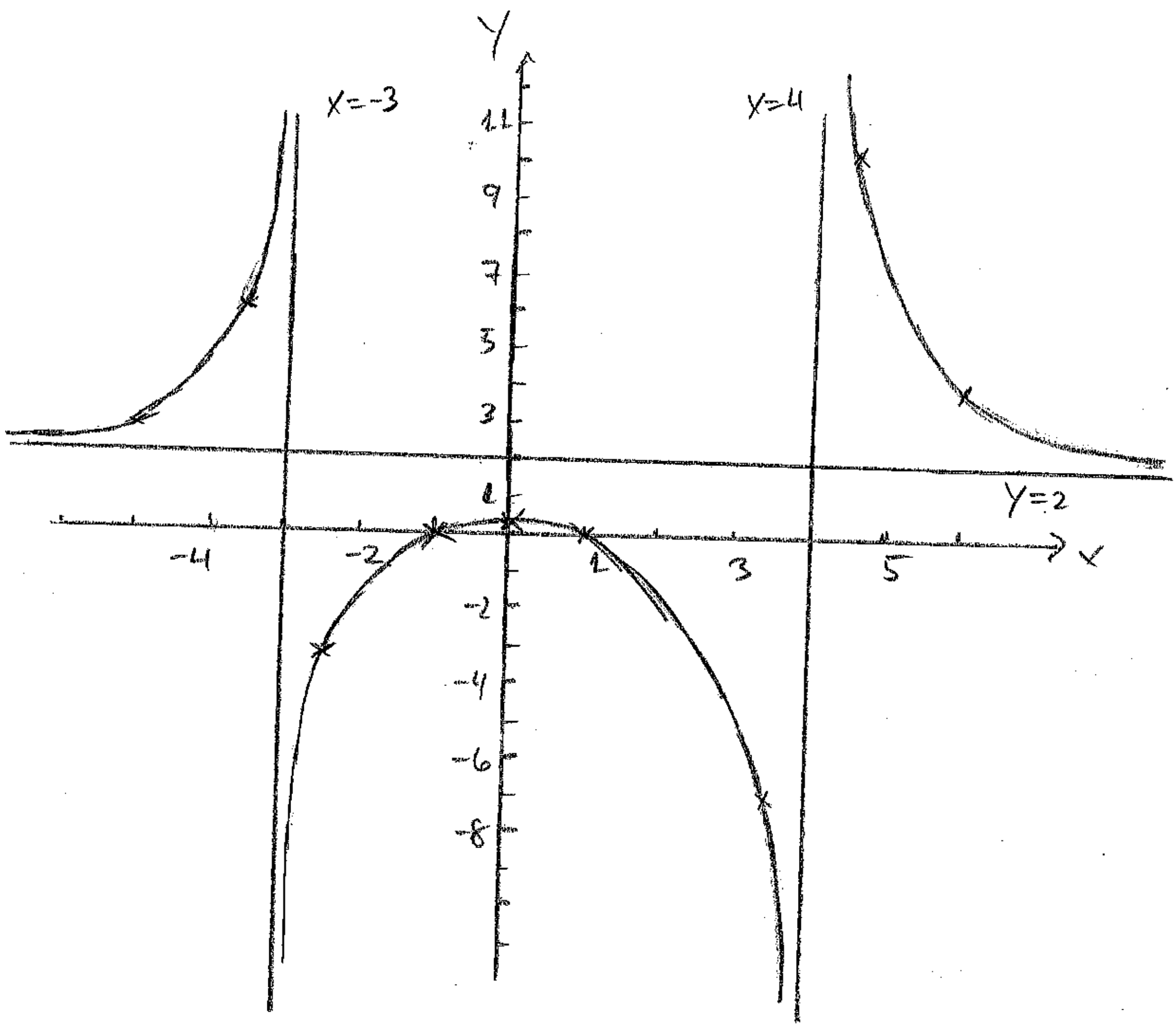
$$f(x) = \frac{(2x^2-2)\cdot\frac{1}{x^2}}{(x^2-x-12)\cdot\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{12}{x^2}} = \frac{2 - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}} \to \frac{2-0}{1-0-0} = 2$$

$\underline{\underline{y=2}}$ er horisontal asymptote for $f(x)$.

d) Tabell: (ved punkt nære dei vertikale asymptotane)

x	-5	-4	$-3{,}5$	$-2{,}5$	-1	0	1	$3{,}5$	$4{,}5$	6
$f(x)$	$2{,}7$	$3{,}75$	6	$-3{,}23$	0	$\frac{1}{6}$	0	$-6{,}9$	$10{,}3$	$3{,}9$

$\rightarrow$ kalkulator



(4) [?] Kva asymptotar har denne funksjonen:

$$g(x) = \frac{2x^4 - 3x + 1}{x^2+1} \quad ?$$

x^2+1 er aldri 0

Der er ingen vertikale asymptotar

$x \to \pm\infty$:

$$g(x) = \frac{(2x^4 - 3x + 1)\cdot \frac{1}{x^2}}{(x^2+1)\cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{2x^2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to$$

$$\frac{2x^2 - 0 + 0}{1+0} = 2x^2 \to +\infty$$

Der er ingen horisontale asymptotar

Polynomdivisjon:

$$(2x^4 - 3x + 1) : (x^2+1) = 2x^2 - 2 - \frac{3x-3}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(2x^4 + 2x^2)} \\
\quad -2x^2 - 3x \\
\quad \underline{-(-2x^2 - 2)} \\
\qquad -3x + 2 + 1 = -3x + 3
\end{array}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-3}{x^2+1} = 0$$

$\Rightarrow g(x) \to 2x^2 - 2$ når $x \to \pm\infty$

[?] Er $y = 2x^2 - 2$ ein asymptote for g?

→ teikne i Geogebra

Svar: Tja...

⑤ Oppsummering: Asymptotar til rasjonale funksjonar

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \ P \text{ og } Q \text{ er polynom}$$

<u>Vertikale asymptotar:</u>

Finn x slik at $Q(x) = 0$

Undersøk om $f(x) \to \pm\infty$ når x går mot desse verdiane

Dersom $P(x)$ er ulik 0 for desse ~~verdiane, er dei asymptotar.~~

Hvis ikkje: Undersøk om $f(x) \to \pm\infty$ når x går mot desse verdiane.

<u>Horisontale asymptotar:</u>

Lat $x \to \pm\infty$ og del teljar og nemnar med x^n der n er graden til $Q(x)$:

$$f(x) = \frac{P(x) \cdot \frac{1}{x^n}}{Q(x) \cdot \frac{1}{x^n}}$$

Går $f(x)$ mot ein bestemt verdi?

I så fall gir dette ein horisontal asymptote

<u>Skrå asymptote:</u>

Utfør polynomdivisjonen $P(x) : Q(x)$.

Dersom resten forsvinn når $x \to \pm\infty$ og det som står att gir ei linje,

er denne linja ein skrå asymptote
for $f(x)$.

$\boxed{?}$ Dersom $P(x)$ har grad m og $Q(x)$ har grad n

$m \leq n$: Horisontal asymptote
($m < n$: $y=0$ er asymptote)

$m = n+1$: Skrå asymptote
$m > n+1$: $\boxed{?}$