Førelesing 11/1

(1) Presisering: Teikna graf feil i går.

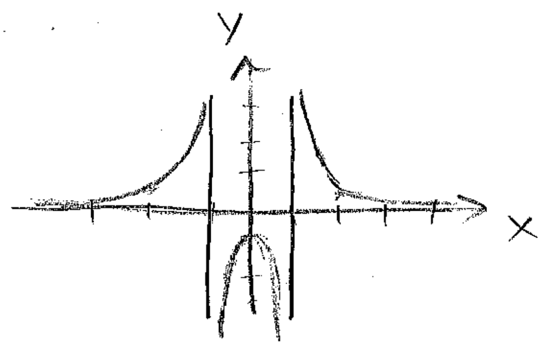
(2) Eksempel

Finn dei vertikale asymptotane og skissér grafen til denne funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Nemnaren er 0 når $x = \pm 1$.
Teljaren er alltid positiv
$f(x) \to \pm\infty$ når $x \to \pm 1$
$x=-1$ og $x=1$ er dei vertikale asymptotane til $f(x)$.

[?] Når $|x|$ blir stor
$f(x) \to 0$



→ GeoGebra

Presisere „skissere" vs. „teikne"

Eksempel

Finn alle vertikale asymptotar til desse funksjonane

a) $a(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

b) $b(x) = \frac{x-3}{(x-3)^2(x+3)}$

---

a) Nemnaren er 0 når $x^2-9=0 \Leftrightarrow x=\pm 3$

For $x=-3$ blir teljaren -6

" $x=3$ — " — 0

$x=-3$ er ein vertikal asymptote.

Kva med $x=3$?

$$a(x) = \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}, \quad x \neq 3$$

$$x \to 3 \Rightarrow a(x) \to \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

? Er $x=3$ ein asymptote?

Nei

b) $b(x) = \frac{x-3}{(x-3)^2(x+3)}$

Nemnaren er 0 når $x=\pm 3$

- Same teljar

$x=-3$ er ein vertikal asymptote

Kva med $x=3$ no?

$$b(x) = \frac{x-3}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}, \quad x \neq 3$$

Ser: $x \to 3 \Rightarrow b(x) \to \pm\infty$

<u>$x=3$</u> er ein vertikal asymptote for $b(x)$

(3) Horisontale asymptotar (8.4)

Sjå: Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ går mot 0 når $x \to \pm\infty$.

Vi seier at $y=0$ er ein <u>horisontal asymptote</u> for $f(x)$.

<u>Generelt</u>:

Dersom $f(x)$ går mot ein bestemt verdi k når $x \to +\infty$ eller når $x \to -\infty$ (eller begge delar), er $y=k$ ein horisontal asymptote for $f(x)$

Mer kompakt

$\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ eller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$

$\Rightarrow$ $y=k$ er ein horisontal asymptote

? Sett „∞"-teiknet før?

I går fann vi at funksjonen

$g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$ har desse vertikale

asymptotane: $x = -2$ og $x = 2$

Kva med horisontale asymptotar?

$g(10) = 1{,}05$
$g(100) = 1{,}0005$
$g(1000) = 1{,}000005$
$g(-1000) = 1{,}000005$

Ser: $g(x) \to 1$ når $x \to \pm\infty$

Meir presis måte.

Vi delar både teljar og nemnar med x^n der n er graden til polynomet i nemnaren:

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{\frac{1}{x^2}(x^2+1)}{\frac{1}{x^2}(x^2-4)} = \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} =$$

$$\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}$$

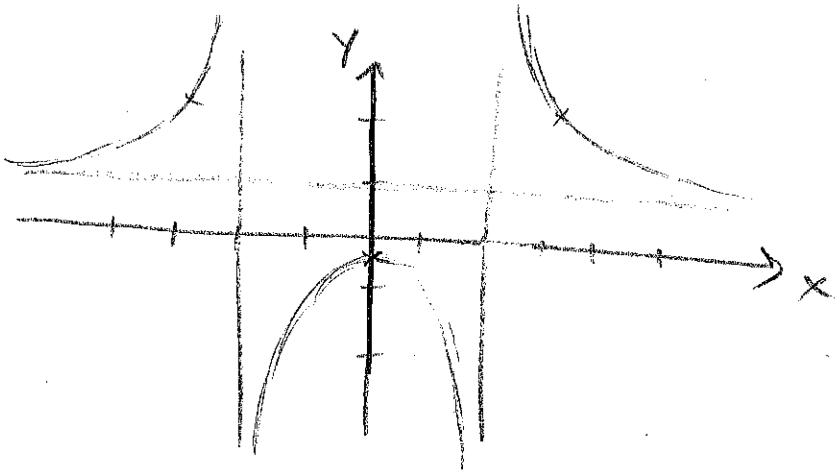
$x \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x^2} \to 0$

Ser: $g(x) \to \frac{1+0}{1-0} = 1$ når $x \to \infty$

Eller: $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 1$

$y = 1$ er ein horisontal asymptote for $g(x)$.

Skisse av grafen



$g(0) = -\frac{1}{4}$

$g(3) = 2$

$g(-3) = 2$

4 Eksempel

Finn alle (eventuelle) horisontale asymptotar til desse funksjonane

$$a(x) = \frac{3x^2 - 5}{x^2 - 7x + 8}$$

$$b(x) = \frac{7x^7 - 3x^3 + x}{5x^7 - 7x^5}$$

$$c(x) = 5^{-x^2}$$

$$d(x) = \frac{3x^2 + 3x - 18}{x - 4}$$

$$a(x) = \frac{3x^2-5}{x^2-7x+8} = \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{8}{x^2}} = \frac{3 - \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}$$

$$x \to \pm\infty \Rightarrow a(x) = \frac{3 - \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}} \to \frac{3-0}{1-0+0} = 3$$

$y = 3$ er ein horisontal asymptote

$\boxed{?}$ Kva er „mest null" av $\frac{7}{x}$ og $\frac{8}{x^2}$?

$$b(x) = \frac{7x^7 - 3x^3 + x}{5x^7 - 7x^5} = \frac{\frac{7x^7}{x^7} - 3\frac{x^3}{x^7} + \frac{x}{x^7}}{\frac{5x^7}{x^7} - \frac{7x^5}{x^7}} =$$

$$\frac{7 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^6}}{5 - \frac{7}{x^2}}$$

$$x \to \pm\infty \Rightarrow b(x) = \frac{7 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^6}}{5 - \frac{7}{x^2}} \to \frac{7-0+0}{5-0} = \frac{7}{5}$$

$y = \frac{7}{5}$ er ein horisontal asymptote

$$c(x) = 5^{-x^2} = \frac{1}{5^{x^2}}$$

(Gauss-kurve)

$$x \to \infty \Rightarrow 5^{x^2} \to \infty \Rightarrow \frac{1}{5^{x^2}} \to 0$$

$\underline{y=0}$ er ein horisontal asymptote

$$d(x) = \frac{3x^2+3x-18}{x-4} = \frac{\frac{3x^2}{x} + \frac{3x}{x} - \frac{18}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}} = \frac{3x + 3 - \frac{18}{x}}{1 - \frac{4}{x}}$$

$$x \to \infty \Rightarrow d(x) = \frac{3x+3-\frac{18}{x}}{1-\frac{4}{x}} \to \frac{3x+3-0}{1-0} = 3x+3 \to \infty$$

$d(x)$ har ingen horisontale asymptoter

[?] Betyr det at $d(x)$ ikkje har nokon asymptotar?

→ GeoGebra.

- Ser at grafen nermar seg ei linje. Denne linja kallar vi ein <u>skrå asymptote</u>.

(5) Skrå asymptotar

Vi såg at $d(x) = \frac{3x^2+3x-18}{x-4}$ går mot ei linje. Korleis kan vi finne denne linja?

<u>Polynomdivisjon:</u>

$$
\begin{array}{l}
(3x^2+3x-18) : (x-4) = 3x+15+\frac{42}{x-4} \\
\underline{-(3x^2-12x)} \\
\quad 15x-18 \\
\quad \underline{-(15x-60)} \\
\qquad 42
\end{array}
$$

Altså: $d(x) = 3x+15+\frac{42}{x-4}$

Ser: $x \to \infty \Rightarrow \frac{42}{x-4} \longrightarrow 0$

[?]

$\underline{y = 3x+15}$ er ein skrå asymptote for $d(x)$

Altså:

Dersom $f(x)$ nærmar seg linja $l(x) = ax + b$ når $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$ er $l(x)$ ein (skrå) asymptote for $f(x)$.

Altså når

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - l(x)) \overset{\boxed{?}}{=} 0$$

$$\left(\text{eller} \lim_{x \to -\infty} (f(x) - l(x)) = 0 \right)$$

⑥ Eksempel

Finn alle asymptotar til funksjonen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 3}$$

og skisser grafen.

Vertikale asymptotar

Nemnaren er 0 når $x = 3$. Då er teljaren $2 \cdot 3^2 - 8 = 8$.

$f(x) \to \pm\infty$ når $x \to 3$

$\underline{\underline{x = 3}}$ er ein vertikal asymptote for $f(x)$.

Når $x \to \pm\infty$

Graden til polynomet i teljaren er 2, og
" " nemnaren er 1

Difor vil $f(x)$ gå mot ∞ eller $-\infty$

når $x \to \pm\infty$. $f(x)$ har difor ingen horisontal asymptote.

Polynomdivisjon:

$$
\begin{array}{l}
(2x^2 - 8) : (x-3) = 2x + 6 + \frac{10}{x-3} \\
-(2x^2 - 6x) \\
\hline
\quad 6x - 8 \\
\quad -(6x - 18) \\
\hline
\quad\quad 10
\end{array}
$$

$$f(x) = 2x + 6 + \frac{10}{x-3}$$

$$x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to 2x + 6 + 0 = 2x + 6$$

$\underline{y = 2x+6}$ er ein skrå asymptote for $f(x)$