Førelesing 10/1

① - Ny oblig til fredag 21.
- Studieverksted, P48

② Eksempel

Bestem grenseverdiane:

a) $\lim_{x \to -2} (3x^2 - 4x + 2)$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{3x^3 + 3x^2 - 24x - 36}{x^2 + x - 12}$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5}{x^3 - 8}$

---

a) $\lim_{x \to -2} (3x^2 - 4x + 2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 2 = 12 + 8 + 2 = \underline{\underline{22}}$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{3x^3 + 3x^2 - 24x - 36}{x^2 + x - 12}$

-Både teljar og nemnar blir 0 dersom vi set inn $x = 3$.

Polynomdivisjon:

$$
\begin{array}{l}
(3x^3 + 3x^2 - 24x - 36) : (x - 3) = 3x^2 + 12x + 12 \\
\underline{-(3x^3 - 9x^2)} \\
\quad 12x^2 - 24x \\
\quad \underline{-(12x^2 - 36x)} \\
\qquad 12x - 36 \\
\qquad \underline{-(12x - 36)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(x^2+x-12):(x-3)=x+4 \\
\underline{-(x^2-3x)} \\
\quad 4x-12 \\
\quad \underline{-(4x-12)} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

Vi får:

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x^3+3x^2-24x-36}{x^2+x-12} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(3x^2+12x+12)}{(x-3)(x+4)} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x^2+12x+12}{x+4} = \frac{3\cdot 3^2+12\cdot 3+12}{3+4} = \underline{\underline{\frac{75}{7}}}$$

$\uparrow$

$\boxed{?}$ Kva om vi hadde fått "$\frac{0}{0}$" her også?
– Faktorisere på nytt.

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^3-8}$

Ser: $x^3-8 \to 0$ når $x\to 2$

$x^2+5 \to 9$ når $x \to 2$

$\frac{x^2+5}{x^3-8} \to +\infty$ når $x \to 2^+$

$\frac{x^2+5}{x^3-8} \to -\infty$ når $x \to 2^-$

Teiknar grafen i geogebra.

– $x=2$ er ein vertikal asymptote til funksjonen $\frac{x^2+5}{x^3-8}$

(3) Kontinuitet

[3] Definisjon

$f(x)$ er kontinuerleg i $x=a$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Eksempel

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+2x-12}{x-2}, & x \neq 2 \\ 10, & x = 2 \end{cases}$

Er $f(x)$ kontinuerleg for $x=2$?

b) $g(x) = \begin{cases} x, & x<1 \\ \frac{1}{2}x^2+1, & x \geq 1 \end{cases}$

Er $g(x)$ kontinuerleg for $x=2$?

" $x=1$?

(c) $h(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$)

---

a) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x^2+2x-12}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(x+3)}{x-2} =$

$2 \lim_{x\to 2} (x+3) = 2\cdot(2+3) = 10$

$f(2) = 10$

$f(x)$ er kontinuerleg for $x=2$

[?] Er $f(x) = 2x+6$? Ja

b) $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 1 = 3$

$g(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 1 = 3$

g (x) er kont. for x=2

? $\lim_{x\to 1} g(x)$

- Grenseverdien er avhengig av kva retning vi legjem frå.

x nermar seg 1 nedanfrå; $x<1$. $x\to 1^-$

x nermar seg 1 ovanfrå; $x>1$. $x\to 1^+$

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$

$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right) = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1 = \frac{3}{2}$

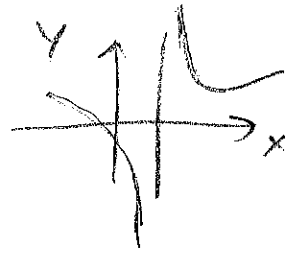
$g(1) = \frac{1}{2}\, 1^2 + 1 = \frac{3}{2}$

$\lim_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim_{x\to 1^+} g(x)$

Grenseverdien eksisterar ikkje

g(x) er ikkje kontinuerleg for x=1

(4) Vertikale asymptotar



Dersom $f(x) \to \pm\infty$ når $x \to a$, er $x = a$ ein vertikal asymptote for $f(x)$

<u>Eksempel</u>

Finn alle vertikale asymptotar til desse funksjonane

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$

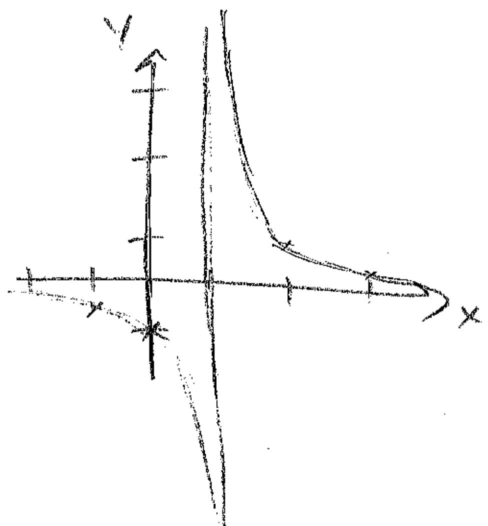
c) $h(x) = \frac{2x^2+10x+12}{x^2-4}$

---

a) Nemnaren er 0 når $x=1$. Teljaren er alltid 1

$\Rightarrow f(x) \to \pm\infty$ når $x \to 1$

<u>$x=1$</u> er ein vertikal asymptote for $f(x)$



? Når x blir veldig stor, kva blir $f(x)$?

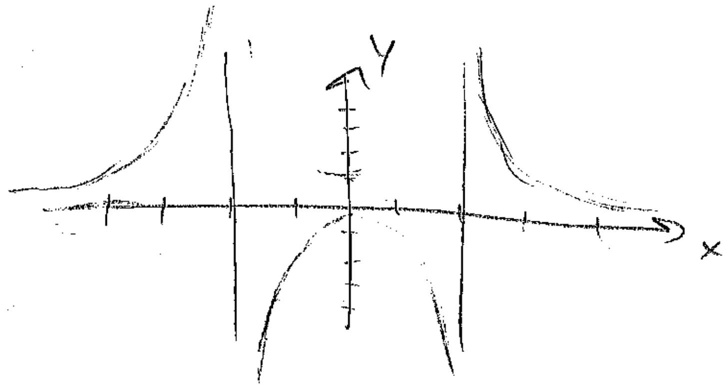
b) Når blir nemnaren 0?

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

For $x = -2$ blir teljaren $(-2)^2 + 1 = 5$
For $x = +2$ — " — $2^2 + 1 = 5$

Altså: $g(x) \to \pm\infty$ når $x \to -2$ og når $x \to +2$

<u>$x = -2$ og $x = 2$</u> er vertikale asymptotar for $g(x)$



c) Også her: Nemnaren er 0 for $x = \pm 2$
For $x = -2$ blir teljaren $2 \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (-2) + 12 = 0$
For $x = +2$ — " — $2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 12 = 36$

$x = -2$ er <u>ikkje</u> asymptote

<u>$x = 2$</u> er ein vertikal asymptote for $h(x)$