Førelesing 3/10

1) Dele ut oblig

- Bra innsats!

Men: Nokre typiske feil:
- Teikn inn asymptotar
- Ver tydeleg på kva som er svaret.
- Bruk „=" – og bruk den rett!
- Bruk av implikasjon, „⇒"

Tips: Sjå på løysingsforslaget

2) Kjerneregelen

$$f(x) = g(u(x))$$

$$f'(x) = g'(u) \cdot u(x)$$

Eksempel

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$u = x^2+1, \quad g(u) = \sqrt{u}$$

Ser: $g(u(x)) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2+1} = f(x)$

Eksempel

Deriver desse funksjonane

$$a(x) = (2x^7 + 7x^2)^{11} + 5$$

$$b(x) = x^3 \cdot (x-3)^{1/3}$$

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2-5)^2}$$

$$u = 2x^7 + 7x^2$$

$$g(u) = u^2 + 5$$

$$a'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = 11(2u^{10}+0) \cdot (14x^6 + 14x) =$$

$$11 \cdot (2x^7+7x^2)^{10} \cdot 14x(x^5+1) = \underline{154x(2x^7+7x^2)(x^5+1)}$$

Når vi kjenner oss klar til det:
- Sluttar å skrive „u" og „g" eksplisitt

$$a'(x) = 11(2x^7+7x^2)^{10} \cdot (14x^6+14x) = \ldots$$

For å derivere $b(x)$ brukar vi produkt-regelen:

$$b'(x) = (x^3)' \cdot (x^2-3)^{1/3} + x^3 \cdot \left((x^2-3)^{1/3}\right)' =$$

$$3x^2 \cdot (x^2-3)^{1/3} + x^3 \cdot \frac{1}{3}(x^2-3)^{1/3-1} \cdot 2x =$$

$$\underline{3x^2 (x^2-3)^{1/3} + \frac{2}{3}x^4 (x^2-3)^{-2/3}}$$

$d(x)$ — kjenner vi den igjen $\boxed{2}$?

$$d(x) = (x^2 + (x^2-5)^2)^{1/2}$$

$$d'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + (x^2-5)^2)^{-1/2} \cdot (x^2 + (x^2-5)^2)' =$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + (x^2-5)^2)^{-1/2} \cdot (2x + 2(x^2-5) \cdot 2x) =$$

$$\frac{2x + 4x(x^2-5)}{2\sqrt{x^2 + (x^2-5)^2}} = \underline{\underline{\frac{x + 2x(x^2-5)}{\sqrt{x^2+(x^2-5)^2}}}}$$

3 Leibniz – notasjon (8.7)

Differensialrekning:

Opfunne meir eller mindre samtidig av Newton og Leibniz – slutten av 1600-talet.

Leibniz hadde ein litt annan skrivemåte (notasjon).

$$f(x) = x^3.$$

I staden for $f'(x)$ kan vi skrive

$\frac{df}{dx}$ – „f derivert med omsyn [hensyn] på x"

$$\frac{df}{dx} = 3x^2$$

Kan også skrive: $df = 3x^2 dx$

dx: Eit uendeleg lite tillegg i x

Altså, dersom x aukar med dx, aukar f med $3x^2 dx = df$.

dx og df kallar vi differensial

Dersom ein annan funksjon g har s som argument, kan vi skrive $g'(s)$ som $\frac{dg}{ds}$.

Såleis kan kjerneregelen skrivast slik:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

(4) Bevis for kjerneregelen (9.7)

- Sjå s. 6 i notat frå 1/2

(5) Derivasjon av ein kvotient

Dersom vi skal derivere $\frac{u(x)}{v(x)}$ - kan bruke produktregelen og kjerneregelen;

$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \left(x \cdot (x^2+1)^{-1}\right)' = \ldots$

Har også formelen $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

Denne skal de vise sjølv i neste oblig.

Stemmer formelen for $f(x) = \frac{x^2}{x}$?

Veit jo at $f(x) = x$ slik at $f'(x) = 1$

- Ser kva vi får med kvotientregelen:

$$\left(\frac{x^2}{x}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot x - x^2 \cdot x'}{x^2} = \frac{2x \cdot x - x^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{OK}$$

Litt meir nyttige eksempel:

Deriver desse funksjonane

$$a(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$b(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-3}}$$

$$a'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \underline{\underline{\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}}}$$

$$b'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x-3} - (x+2) \cdot \frac{1}{2}(x-3)^{1/2-1} \cdot 1}{\sqrt{x-3}^{\,2}} =$$

$$\frac{\left(\sqrt{x-3} - \frac{x+2}{2\sqrt{x-3}}\right) \cdot \sqrt{x-3}}{(x-3) \cdot \sqrt{x-3}} = \frac{x-3-\frac{1}{2}(x+2)}{(x-3)^{3/2}} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}x - 4}{(x-3)^{3/2}} = \underline{\underline{\frac{x-8}{2(x-3)^{3/2}}}}$$

⑥ Eksempel

Gitt funksjonen $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Bestem

a) eventuelle nullpunkt for f

b) den største mogelege definisjonsmengda til f

c) eventuelle asymptotar for f

d) monotonieigenskapene til f

e) krumming/konkavitets eigenskapene til f

f) Skisser grafen til f.

---

a) Nullpunkt: $f(x) = 0$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad | \cdot \sqrt{1-x^2}$$

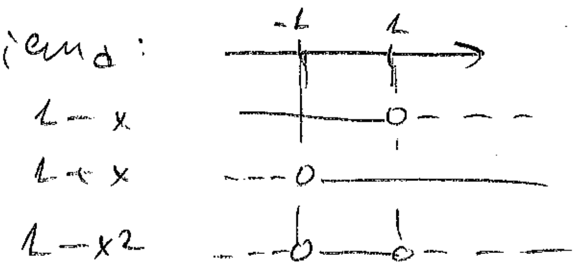
$$\underline{\underline{x = 0}}$$

(Evt. : $(0, 0)$)

b) Det som står under rot-teiknet, får ikkje vere negativt. Vi må krevje at
$1 - x^2 > 0$

$$1 - x^2 = (1-x)(1+x)$$

Forteiknskjema:



Må kreve: $-1 \leq x \leq 1$

Vidore: Nemnaren kan ikkje vere null

Nemnaren er null: $\sqrt{1-x^2} = 0$

$$1 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Vi må kreve at x er ulik -1 og ulik $+1$

Vi får definisjonsmengda $\underline{D_f = \langle -1, 1 \rangle}$

c) Nemnaren går mot 0 når $x \to \pm 1$

$x \to 1^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$

$x \to -1^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$\Rightarrow$ $\underline{x = -1 \text{ og } x = 1}$ er vertikale asymptotar for f

f er ikkje definert for $x \to \pm\infty$
$\Rightarrow$ vi har ingen skrå eller horisontale asymptotar.

d) $$d'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\sqrt{1-x^2}^{\,2}}$$

$\boxed{?}$ Korleis deriverar vi $\sqrt{1-x^2}$?

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \left((1-x^2)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (1-x^2)' =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Vi får:

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{1-x^2} - x\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{1-x^2} =$$

$$\frac{\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^{3/2}} = \underline{\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}}$$

$$x \in \langle -1, 1\rangle \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

f er veksande i heile definisjonsmengda

e) $f''(x) = \left(\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\right)' = \left((1-x^2)^{-3/2}\right)' =$

$-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-5/2}\cdot(1-x^2)' =$

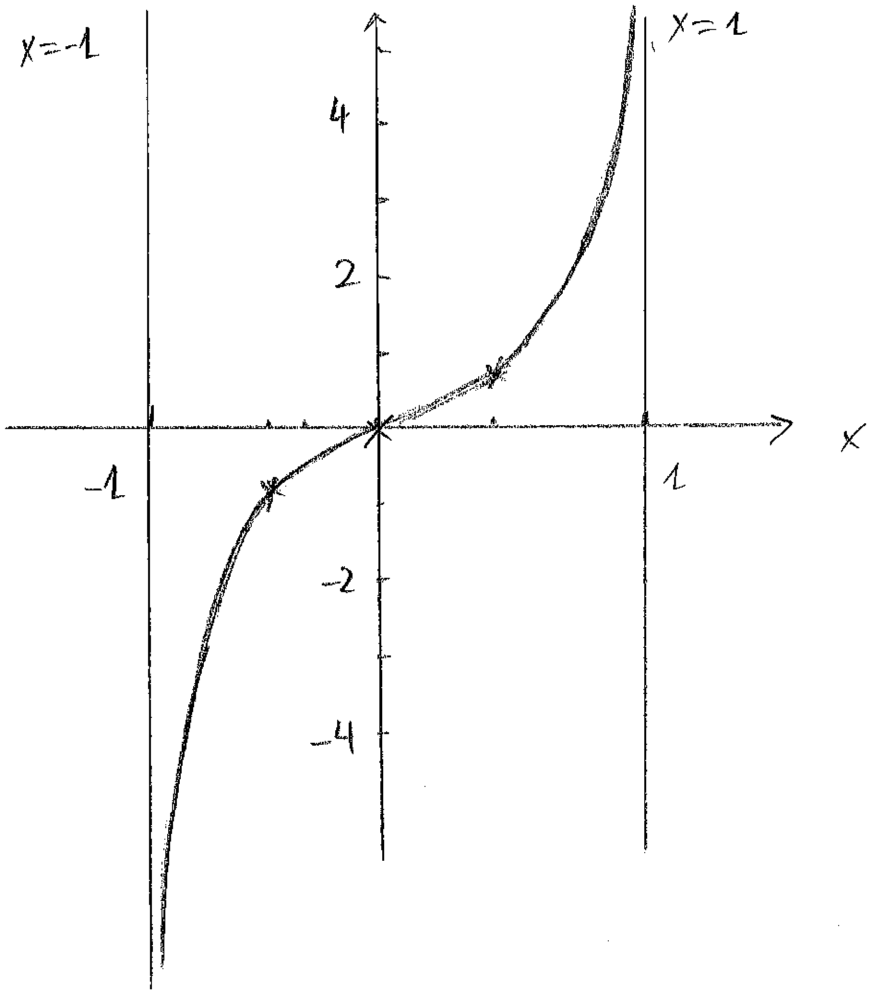
$-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-5/2}\cdot(-2x) = \frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$

Forteiknskjema:

	-1		0		1
$3x$		−	0	+	
$(1-x^2)^{5/2}$		+		+	
$f''(x)$		−	0	+	
		$\cap$		$\cup$	

f har konkavitet opp for $0<x<1$ og
f har konkavitet ned for $-1<x<0$

f)



$f(0) = 0$

$f(-\frac{1}{2}) = -0,6$

$f(\frac{1}{2}) = 0,6$