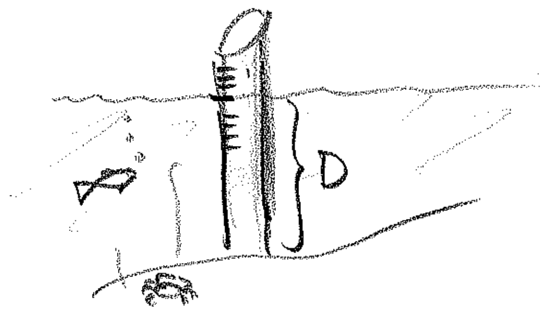
Førelesing 10/2

② Fortsette med eksempel frå tysd. 9/2



Djupna, D meter, gjennom eit døgn varierer med tida som ein sinus-funksjon. Normaldjupna er 5,4 m. Klokka 3:15 steig vatnet og djupna var 5,4 m. Skilnaden [forskjellen] mellom flo og fjøre [fjære] er 2,1 m. Finn eit uttrykk for D(t) der t er talet på timar etter midnatt.

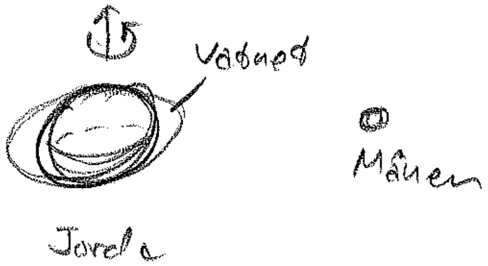
Sjå her: $D(t) = a\sin(k(t-c)) + d$

Likevektslinje: $y = d$, $d = 5,4$

$k = \frac{2\pi}{p}$ der p er perioden

? Kva er p?

Ca 12 h



$p = 12 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

Topp (flo): $d + |a|$

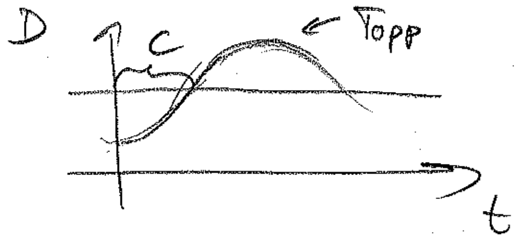
Botn (fjøre): $d - |a|$

$$d + |a| - (d - |a|) = 2{,}1$$

$$2|a| = 2{,}1$$

$$|a| = \frac{2{,}1}{2} = 1{,}05$$

$$a = \pm 1{,}05$$



$\underline{a > 0}$

$a = 1{,}05$

Forskyvning: Kl. 3:15 tilsvarar 3 h og 15 min,

altså $3 + \frac{15}{60} = 3{,}25$ timar

$C = 3{,}25$

Altså: $\underline{D(t) = 1{,}05 \sin\left(\frac{\pi}{6}(x - 3{,}25)\right)} + 5{,}4$

Vi kan bruke denne modellen til å føreseie ting ; „gjere prediksjonar".

Desse kan <u>testast</u>.

Til dømes:

Kva vert djupna klokka 13:00?

Når er det fjøre dette døgnet?

Når er djupna under 5 m?

$D(13) = 1{,}05 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}(13-3{,}25)\right) + 5{,}4 = \underline{4{,}43}$

Djupna skal – etter modellen – vere 4,43 m kl 13:00.

Fjøre: D(t) minimal

D(t) er minimal når $\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3{,}25)\right)$ er minimal. -Har då:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3{,}25)\right) = -1$$

$$\frac{\pi}{6}(t-3{,}25) = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t - 3{,}25 = \frac{6}{\pi}\left(\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi\right) = 9 + n \cdot 12$$

$$t = 9 + n \cdot 12 + 3{,}25 = 12{,}25 + n \cdot 12$$

Hugsar: $t \in [0, 24\rangle$

$n = -1$:

$t = 12{,}25 - 12 = 0{,}25$

-Tilsvarar kl. 0:15

$n = 0$: $t = 12{,}25$

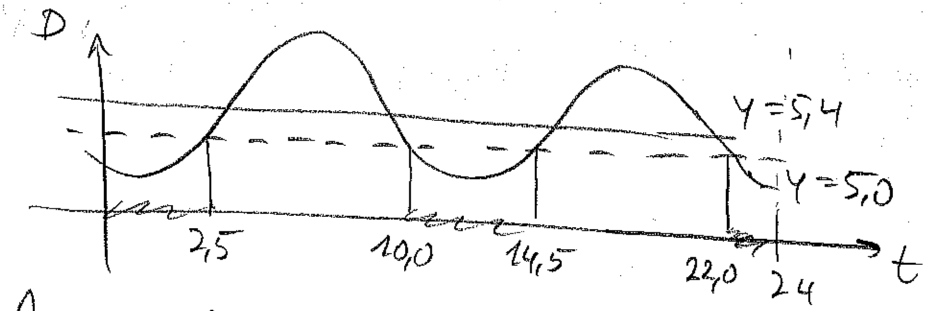
-Tilsvarar kl: 12:15

Det blir fjøre kl. 0:15 og kl. 12:15

Lågare enn 5 m:

$D(t) < 5{,}0$

-Løyser grafisk v. h. a. GeoGebra.



Av grafen ser vi at $D(t) < 5{,}0$ når
$0 < t < 2{,}5$ og når $10{,}0 < t < 14{,}5$
og når $22{,}0 < t < 24$

(Alternativ skrivemåte: $D(t) < 5$ når
$0 < t < 2{,}5 \lor 10{,}0 < t < 14{,}5 \lor 22{,}0 < t < 24$)

Altså: Djupna er mindre enn 5 m frå midnatt til 2:30, mellom kl. 10:00 og 14:30 og frå 22:00 til midnatt.

-Kan også løyse ulikskapen ved rekning:

$$D(t) < 5{,}0$$

$$1{,}05 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3{,}25)\right) + 5{,}4 < 5{,}0$$

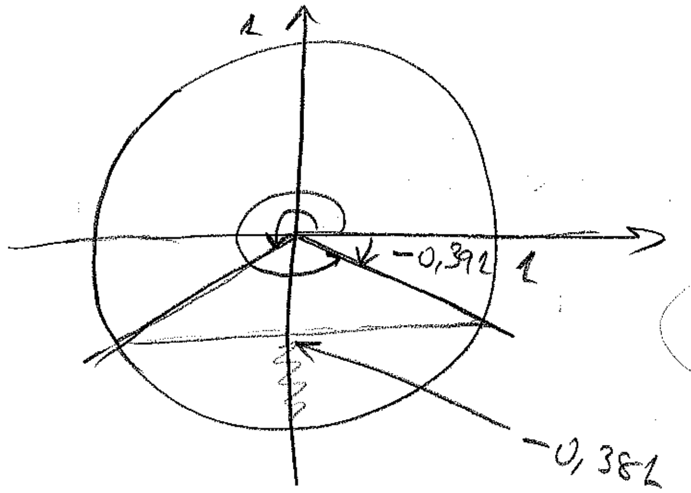
For å gjere ting litt enklare:
Innfører $u = \frac{\pi}{6}(t-3{,}25)$

$$1{,}05 \sin u + 5{,}4 < 5{,}0$$

$$1{,}05 \sin u < 5{,}0 - 5{,}4 = -0{,}4$$

$$\sin u < -\frac{0{,}4}{1{,}05} = -0{,}381$$

$\sin^{-1}(-0,381) \approx -0,391$ $(\approx 22,4°)$



$\sin u < -0,381$

I fyrste omløp ser vi at vi må ha at

$u < 2\pi - 0,391$ og $u > \pi + 0,391$

$\pi + 0,391 < u < 2\pi - 0,391$

$3,533 < u < 5,892$

I n-te omløp:

$3,533 + n\cdot 2\pi < u < 5,892 + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

$3,533 + n\cdot 2\pi < \frac{\pi}{6}(t - 3,25) < 5,892 + n\cdot 2\pi$

$\frac{6}{\pi}(3,533 + n\cdot 2\pi) < t - 3,25 < \frac{6}{\pi}(5,892 + n\cdot 2\pi)$

$6,748 + 12n < t - 3,25 < 11,253 + 12n$

$6,748 + 3,25 + 12n < t < 11,253 + 3,25 + 12n$

$10,0 + 12n < t < 14,5 + 12n$

$n = -1$: $\quad -2,0 < t < 2,5$

$n = 0$: $\quad 10,0 < t < 14,5$

$n = 1$: $\quad 22,0 < t < 26,5$

Hugsar: $t \in [0, 24\rangle$

Vi får: $0 < t < 2,5 \lor 10,0 < t < 14,5 \lor 22,0 < t < 24,0$

② Cosinus-funksjonen (igjen)

- Har sett at cosinus-funksjonen også er ein sinus-funksjon
- Må kunne skrive:

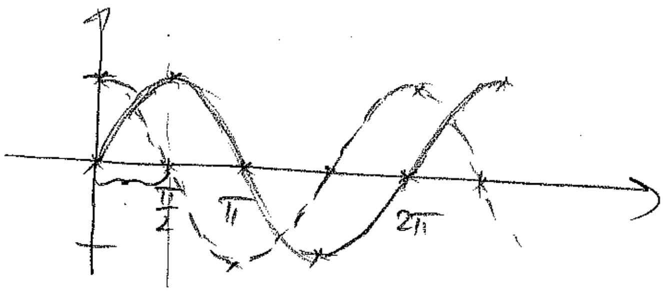
$$\cos x = a\sin(k(x-c)) + d$$

[?] Kva er a, k, c og d?

- Same amplitude og periode som for $\sin x$; $|a| = 1$ og $p = 2\pi$

$\Rightarrow k = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

Også: $d = 0$



Ser: $c = \frac{\pi}{2}$

Også: Rett til høgre for $x = c$ har vi ein botn. Da må a vere negativ

$a = -1$

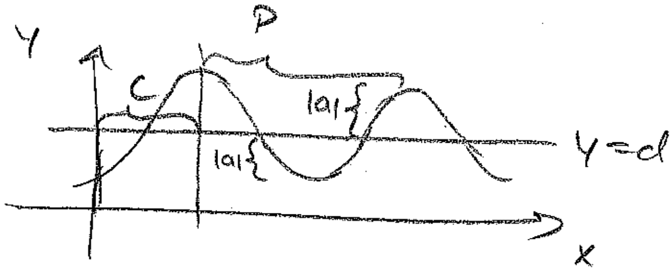
$\Rightarrow \cos x = -\sin\left(1\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) + 0 = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

Korleis ser denne funksjonen ut:

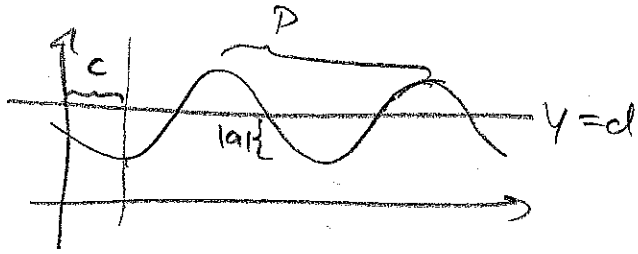
$$f(x) = a\cos(k(x-c)) + d \quad ?$$

– Ganske lik sinus-funksjonen

$a > 0$:



$a < 0$:



$a>0$: c er x-verdien til den fyrste toppen

$a<0$: c er x-verdien til den fyrste botnen.

(3) Eksempel

Funksjonen $f(x) = -3\cos(\frac{\pi}{7}x) - 2$ er gitt

a) Bestem amplituden, perioden og likevektslinja til f.

b) Kva er den største verdien f kan ha?

, Når har f denne verdien?

c) Finn nullpunkta til f.

d) Løys ulikskapen $f(x) > 0$ når $x \in [0, 14]$

a) Amplitude: $|-3| = \underline{\underline{3}}$

Likevektslinje: $\underline{\underline{y = -2}}$

Bølgetal: $k = \frac{\pi}{7}$

Periode: $p = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \cdot 7}{\frac{\pi}{7} \cdot 7} = \underline{\underline{14}}$

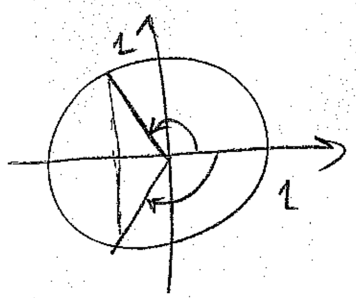
b) $\cos(\frac{\pi}{7}x)$ kan minimalt vere -1. Difor kan f maksimalt vere $(-3)\cdot(-1) - 2 = \underline{\underline{1}}$

$\cos(\frac{\pi}{7}x) = -1$

$\frac{\pi}{7}x = \pi + n \cdot 2\pi = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

$\underline{\underline{x = 7(2n+1)}}$

c) $f(x) = 0$



$-3\cos(\frac{\pi}{7}x) - 2 = 0$

$\cos(\frac{\pi}{7}x) = -\frac{2}{3}$

$\cos^{-1} -\frac{2}{3} = 2{,}30$

$\frac{\pi}{7}x = 2{,}30 + n \cdot 2\pi$ eller $\frac{\pi}{7}x = -2{,}30 + n \cdot 2\pi, \; n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{7}{\pi}(2{,}30 + n \cdot 2\pi)$ eller $x = \frac{7}{\pi}(-2{,}30 + n \cdot 2\pi)$

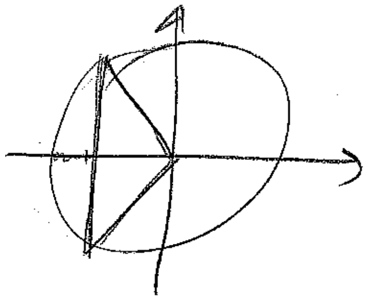
$\underline{\underline{x = 5{,}12 + 14n \text{ eller } x = -5{,}12 + 14n}}$

d) $f(x) > 0$

$-3\cos\left(\frac{\pi}{7}x\right) - 2 > 0$

$-3\cos\left(\frac{\pi}{7}x\right) > 2$

$\cos\left(\frac{\pi}{7}x\right) < -\frac{2}{3}$



$\cos^{-1} -\frac{2}{3} = 2{,}30$

1. omløp: $2{,}30 < \frac{\pi}{7}x < 2\pi - 2{,}30 = 3{,}98$

$2{,}30 \cdot \frac{7}{\pi} < x < 3{,}98 \cdot \frac{7}{\pi}$

$\underline{\underline{5{,}12 < x < 8{,}87}}$

- Sjekke mot GeoGebra?