Førelesing 5/4

① Eksempel med delbrøksopspalting (sjå notat frå 4/4

② Oppsummere „alle" integrasjonsreglar, ubestemte:

Dersom $F'(x) = f(x)$: $\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C$

Def.

Linearitet $\begin{cases} \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \\ \int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot \int f(x)\,dx \end{cases}$

$\int g(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int g(u)\,du$ ← Int. ved variabelbyte (jmf. kjerneregelen

$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$

Delvis int. (jmf. produktregelen)

Spesielle funksjonar:

$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C, \quad r \neq -1$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

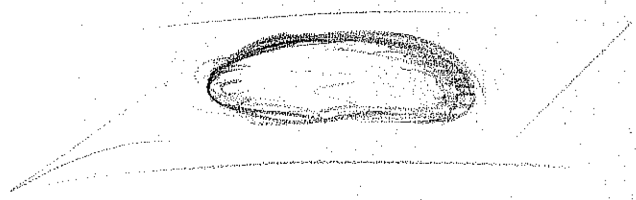
$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\boxed{?}$ For bestemte int.?

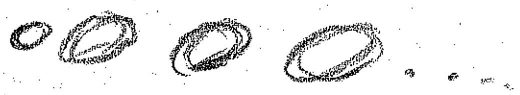
③ Volum (16.5)

- Tenkjer oss at vi vil finne volumet av eit brød:



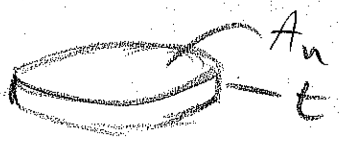
Kan gjerast slik:

Vi skjer det opp i skiver



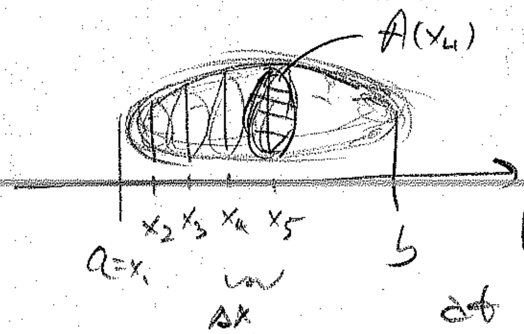
Om skivene har tjukna t og arealet på kvar side er omtrent likt:

Skive n:



Volumet vert $V \approx A_1 \cdot t + A_2 \cdot t + \dots$

Koordinatsystem:



$V \approx A(x_1) \cdot \Delta x + A(x_2) \cdot \Delta x + \dots$

[?] Kva skal til for at volumet vert nøyaktig?

- Antal skiver må gå mot <u>uendeleg</u>.

Altså, dersom $S_n = A(x_1)\Delta x + A(x_2)\Delta x + \ldots + A(x_n)\cdot \Delta x$

der $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$V = \lim_{n\to\infty} S_n$$

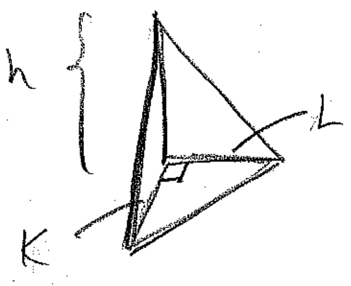
[?] Kjenner vi att dette?

S_n er det bestemte integralet av $A(x)$ frå a til b;

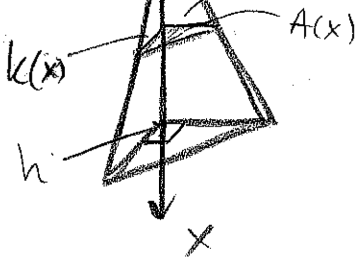
$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx}$$

(4) Eksempel

Finn volumet av denne pyramiden:



Plasserar pyramiden langs ein akse:



$$l(x) = L\cdot\frac{x}{h}$$

$$k(x) = K\cdot\frac{x}{h}$$

$$A(x) = \frac{l(x)\cdot k(x)}{2} = \frac{1}{2}L\frac{x}{h}\cdot K\frac{x}{h} =$$

$$\frac{KL}{2h^2}x^2$$

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{KL}{2h^2} x^2\,dx = \frac{KL}{2h^2}\int_0^h x^2\,dx =$$

$$\frac{KL}{2h^2}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{KL}{2h^2}\left(\frac{1}{3}h^3 - 0\right) = \frac{1}{3}\,\frac{KL}{2}\cdot\frac{1}{h^2}\cdot h^3$$

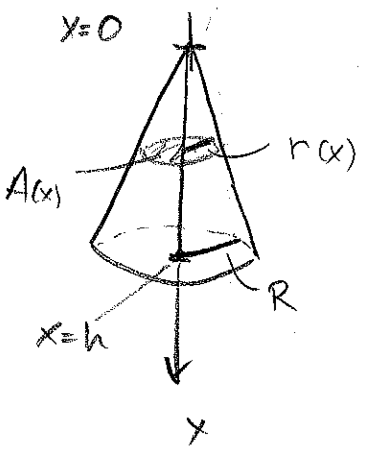
$$\frac{1}{3}\,\frac{KL}{2}\cdot h$$

Med grunnflate $G = \frac{KL}{2}$: $\boxed{V = \frac{1}{3}Gh}$

(jmf. eksempel s. 602).

(5) Eksempel

Finn volumet av ei kjegle med høgda h og grunnflate med radius R.



$$r(x) = R\,\frac{x}{h}$$

$$A(x) = \pi\,(r(x))^2 = \pi\cdot\left(R\,\frac{x}{h}\right)^2 = \pi\cdot R^2\,\frac{x^2}{h^2}$$

Volumet er:

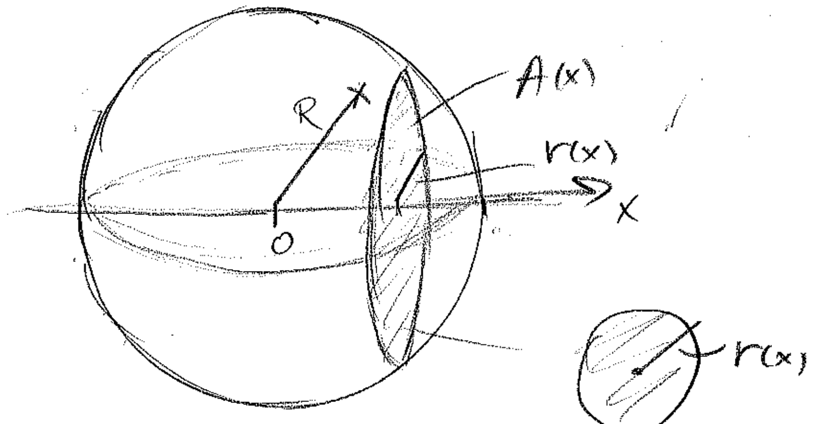
$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \pi\cdot R^2\,\frac{x^2}{h^2}\,dx =$$

$$\pi\,\frac{R^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \pi\,\frac{R^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h =$$

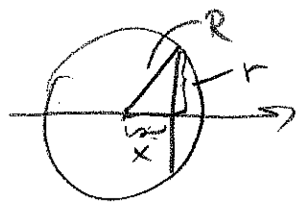
$$\pi\,\frac{R^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}h^3 - 0\right) = \frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{h^3}{h^2} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Altså: Volumet av kjegla er $\underline{\frac{1}{3}\pi R^2 h}$

⑥ Volumet av ei kule (sjå vekk frå boka her!)



$A(x) = \pi (r(x))^2$



Pytagoras: $x^2 + r^2 = R^2$

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$(r(x))^2 = R^2 - x^2$$

Volum: $V = \int_{-R}^{R} A(x)\, dx = \int_{-R}^{R} \pi \cdot (R^2 - x^2)\, dx =$

[?] integrasjonsgrenser | $\pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx =$

$$\pi R^2 \cdot [x]_{-R}^{R} - \pi \left[\tfrac{1}{3} x^3\right]_{-R}^{R} =$$

$$\pi R^2 \cdot (R - (-R)) - \pi \left(\tfrac{1}{3} R^3 - \tfrac{1}{3}(-R)^3\right) =$$

$$2\pi R^3 - \frac{\pi}{3} \cdot 2R^3 = \left(2 - \frac{2}{3}\right)\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Altså: Volumet av ei kule er $\underline{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$