Førelesing 14/4

① Rep.

- Skilnaden på følger og rekker
- Aritmetisk rekke:

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

der $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

d: Differansen

② Fullføre eksempel frå tysdag (sjå notat frå 12/4).

③ Oppsummere: Summen S_n av ei aritmetisk rekke er gitt ved $\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$

④ Eksempel

Sleipe Svein lurer ein „kompis" til å gå med på følgande avtale.

Svein betalar kompisen sin 100 kroner den fyrste veka. Neste veke betalar Svein kompisen sin 15 kr mindre. Slik held dei på kvar veke i eit år.

a) Når skal kompisen begynne å betale Svein; når blir beløpet Svein skal betale negativt?

b) Kor mykje har Svein betalt før dette?

c) Kor mykje har Svein betalt til saman?

- Aritmetisk rekke med $a_1 = 100$ og differanse $d = 15$

a) $a_n = a_1 + (n-1)d = 100 - 15(n-1)$

$a_n < 0$

$100 - 15(n-1) < 0$

$100 < 15(n-1)$

$n-1 > \frac{100}{15}$

$$n > \frac{100}{15} + 1 = \frac{20}{3} + 1 = \frac{23}{3} = 7 + \frac{2}{3}$$

$a_n < 0$ når $n \geq 8$

Beløpet blir negativt etter <u>8 veker</u>.

b) Før dette:

$$S_7 = \frac{7 \cdot (a_1 + a_7)}{2}$$

$$a_7 = 100 - 15 \cdot (7-1) = 10$$

$$S_7 = \frac{7 \cdot (100 + 10)}{2} = 385$$

Sleipe Svein har betalt <u>385 kr</u>.

c) „Betalt" til saman: S_{52}

$$a_{52} = 100 - 15 \cdot 52 = -665$$

$$S_{52} = \frac{52 \cdot (100 + (-665))}{2} = -14690$$

Svein har „betalt" <u>-14690 kr</u>.

(5) Geometriske rekker

– Ei rekke av ledd som følger ei geometrisk følge, kallar vi ei geometrisk rekke.

Eksempel:

1) $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$

2) $\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2} + 2 + \dots$

3) $5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots$

4) $3 - 3 + 3 - 3 + \dots$

Generelt: Det n-te leddet a_n er gitt ved $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

k: Kvotient.

I eksempla: 1) $k=2$, 2) $k=\sqrt{2}$, 3) $k=\frac{1}{5}$, 4) $k=-1$

Sum:

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}}$$

Bevis: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 \cdot k$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_1 \cdot k + \dots + a_1 \cdot k^{n-1}$

$k S_n = a_1 k + a_1 k^2 + \dots + a_1 k^n$

$$kS_n - S_n = a_1k + a_1k^2 + \dots + a_1k^n -$$

$$(a_1 + a_1k + \dots + a_1k^{n-1}) = a_1k^n - a_1$$

$$(k-1)S_n = a_1(k^n - a_1)$$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{k^n - a_1}{k-1}}$$ (q. e.d)

6 Eksempel

Ei geometrisk rekke har $a_1 = 5$ og kvotient 2.

a) Finn dei 4 fyrste ledda

b) Finn summen av desse ledda – både ved å legge ledda saman direkte og ved å bruke formelen

c) Finn summen av dei 15 fyrste ledda.

d) Summen av dei n fyrste ledda av ei aritmetisk rekke med $a_1 = 5$ og differanse $d = -\frac{1}{2}$ er -258. Finn n.

e) Kontrollér svaret i d) på kalkulator.

a) $a_1 = 5,\ k = 2$

$a_2 = 5 \cdot 2 = 10$

$a_3 = 10 \cdot 2 = 20$

$a_4 = 20 \cdot 2 = 40$

b) $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5 + 10 + 20 + 40 = \underline{\underline{75}}$

$S_4 = a_1 \cdot \frac{k^4 - 1}{k - 1} = 5 \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 5 \cdot 15 = \underline{\underline{75}}$

c) $S_{15} = a_1 \cdot \frac{k^{15} - 1}{k - 1} = 5 \cdot \frac{2^{15} - 1}{2 - 1} = \underline{\underline{163\,835}}$

d) Aritmetisk rekke:

$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5 - \frac{n-1}{2}$

$S_n = \frac{n\left(5 + 5 - \frac{n-1}{2}\right)}{2} = \frac{n}{2}\left(10 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{21}{2} - \frac{n}{2}\right)$

$= -\frac{n^2}{4} + \frac{21}{4} n$

$S_n = -258$

$-\frac{n^2}{4} + \frac{21}{4} n = -258$

$-n^2 + 21n + 4 \cdot 258 = 0$

$\vdots$

$n = -27$ eller $n = 48$.

Skal ha $n > 0$

$\Rightarrow$ $n = 48$

7 Obligane

- Flinke til å derivere
- Vi har skjøna kva det vil seie å integrere
- Litt skuffa over at så få prøvde seg på 5 c).

Framleis: Trene oss i å uttrykke oss presist, notasjon

- Sjå løysingsforslaget!
- Om einingar.

t: Tid i sekund

$t = \ldots = \sqrt{1200} \approx 34,641\ s$

?

Gjer slik:

$t = \sqrt{1200} \approx 34,641$

Farten er størst etter 34,641 s

? Korleis veit at $v'(t) = 0$ gir maksimal fart – ikkje minimal?

→ Forbeilenskjema.

8 Hvis tid: ~~I~~Integrasjonstips

Eksempel

1) $\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}\, dx$

2) $\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 3x + 2}\, dx$

3) $\int x^3 e^{2x}\, dx$

4) $\int x^3 \ln(2x)\, dx$

---

1) Fungerer med variabelskiftet $u = x^3 - 3x + 2$

2) Kan bruke delbrøksoppspalting (nemnaren kan skrivast som $(x-1)^2 (x+2)$).

3) Delvis integrasjon 3 ganger med først $u = x^3$ og $v' = e^{2x}$

4) Delvis int. med $u = \ln(2x)$ og $v' = x^3$