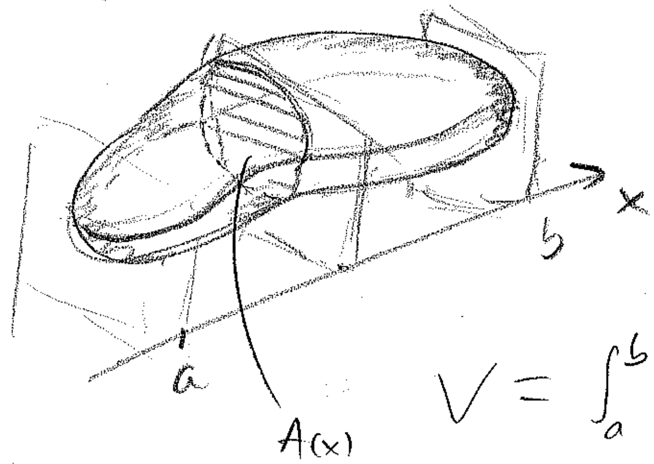
Forelesing 11/4

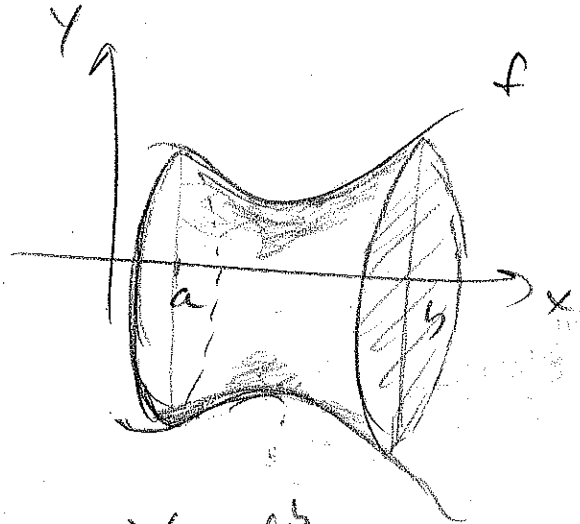
(1) Integrasjon og volum (rep)



A(x): Areal av snitt-flate

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

Omdreiings-gjenstand



$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

(2) Eksempel

(gledd mål til dette lenge).

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$,

a) finn arealet avgrensa av grafen til $f(x)$, x-aksen linja $x=1$ og linja $x=\ell$ der $\ell > 1$.

b) Finn volumet av gjenstanden vi får ved å dreie grafen til f frå $x=1$ til $x=\ell$ rundt x-aksen

c) Dersom vi let $\ell \to \infty$, kva går arealet i oppg. 1 mot?

d) I den same grensa, kva går volumet i oppgåve b) mot?

---

a) Areal:

$$A(\ell) = \int_1^\ell f(x)\,dx = \int_1^\ell x^{-1}\,dx = [\ln|x|]_1^\ell = \ln \ell - \ln 1 = \underline{\underline{\ln \ell}}.$$

b) Voulum:

$$V(\ell) = \pi \int_1^\ell (f(x))^2\,dx = \pi \int_1^\ell x^{-2}\,dx =$$

$$\pi\left[-x^{-1}\right]_1^{\ell} = \pi\left(-\frac{1}{\ell}-\left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \underline{\underline{\pi\left(1-\frac{1}{\ell}\right)}}$$

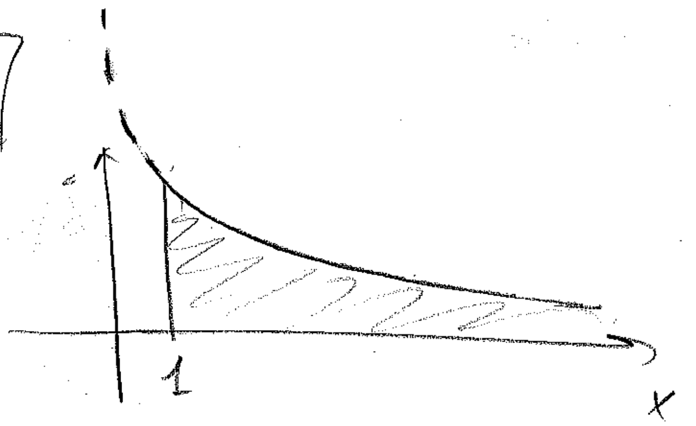
c) Dersom $\ell \to \infty$: $\ln \ell \to \infty$.

Altså: $\underline{\underline{A(\ell) \to \infty \text{ når } \ell \to \infty}}$.

d) Dersom $\ell \to \infty$: $\frac{1}{\ell} \to 0$

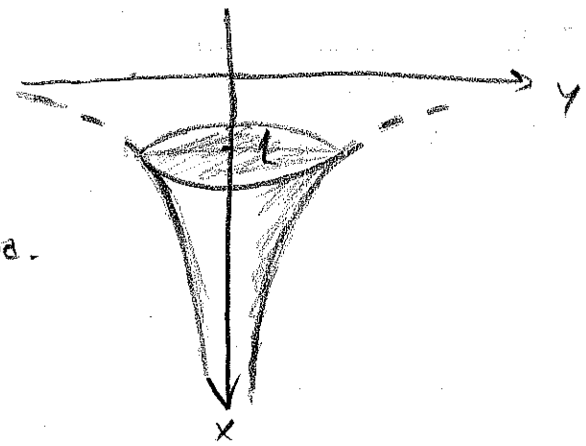
Altså: $V(\ell) \to \pi\,(1-0) = \underline{\underline{\pi}}$

$\boxed{?!}$



Det finst ikkje nok måling til å måle denne flata,

men det finst nok måling til å fylle denne trakta.



Go figure!

(3) Følger (17.1)

[?] Finn dei tre neste tala her:

a) 3, 6, 9, ... (12, 15, 18)

b) 1, −2, 4, −8, ... (16, −32, 64)

c) 2, 3, 5, 7, 11, ... (13, 17, 19) Primtal

d) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... (13, 21, 34) Fibonacci

Talfølge: Sekvens av tal i ei bestemt rekkefølge: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Følga kan vere endeleg eller uendeleg.

Tala i følga, a_n, kallar vi ledd.

[?] Klarar vi å finne formlar for ledd n i følgene over?

a) $a_1 = 3$

$a_2 = 6$

$a_3 = 9$

$\vdots$

$$\boxed{a_n = 3 \cdot n}$$

b) $a_1 = 1$

$a_2 = -2$

$a_3 = 4$

$\vdots$

? $a_{n+1} = (-2) \cdot a_n$

– Rekursjonsformel: $a_{n+1} = -2a_n$

Kan også skrive: $a_n = (-2)^{n-1}$

Sjekk: $a_1 = (-2)^{1-1} = (-2)^0 = 1$ ok

$a_2 = (-2)^{2-1} = -2$ Ok

$a_3 = (-2)^{3-1} = (-2)^2 = +4$ Ok

$\vdots$

c) Primtala:

– Hadde vi funne ein formel for alle primtala, ville vi ha vore verdsberømte...

d) – Vanskeleg å finne ein eksplisitt formel. Men kan finne ein implisitt formel:

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

Veit: $a_1 = 1$
$a_2 = 1$

Får då for $n=1$: $a_3 = a_1 + a_2 = 1+1 = 2$

$n=2$: $a_4 = a_2 + a_3 = 1+2 = 3$

$n=3$: $a_5 = a_3 + a_4 = 2+3 = 5$

Går an å finne ein eksplisitt formel:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

(Skal ikkje vise dette).

[?] Kjenner de dette talet: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$?

→ Det gylne snitt.

(14) Aritmetiske følger (17.2)

[?] Kva har desse følgene felles?

a) 1, 2, 3, 4, ...

b) 3, 10, 17, 24, ...

c) 14, 9, 4, −1, ...

d) 0, π, 2π, 3π, ...

– Det neste talet i følga får vi ved å legge eit bestemt tal til det førige.

~~I eksempla over er dette talet~~ [?]

a) 1, b) 7, c) −5 og d) π. Slike følger kallar vi <u>aritmetiske</u>.

5 Eksempel

Ei følge er gitt ved rekursjonsformelen

$a_n = a_{n-1} + 8 \quad (n \geq 2)$ og at $a_1 = 1$.

a) Finn dei 7 fyrste ledda i følga.

b) Finn ein eksplisitt formel for a_n.

---

a) $a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + 8 = 1 + 8 = 9$

$a_3 = a_2 + 8 = 9 + 8 = 17$

$a_4 = a_3 + 8 = 17 + 8 = 25$

$a_5 = a_4 + 8 = 25 + 8 = 33$

$a_6 = a_5 + 8 = 33 + 8 = 41$

$a_7 = a_6 + 8 = 41 + 8 = 49$

b) Ser at for ledd n har vi lagt til 8 $(n-1)$ gonger. Vi startar med 1.

Vi får: $\boxed{a_n = 1 + (n-1) \cdot 8} = 1 + 8n - 8 = 8n - 7$

$\underline{a_n = 8n - 7}$

Generelt for ei aritmetisk følge med differanse d:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

6 Geometriske følger (1.7.3)

[?] Kva har desse følgene felles?

a) $3, 6, 12, 24, \ldots$

b) $1, e, e^2, e^3, \ldots$

c) $6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$

d) $2, -10, 50, -250, \ldots$

- Det neste talet i følga får vi ved å multiplisere det førige med eit bestemt tal. I eksempla over er dette talet

a) 2, b) e, c) $\frac{1}{3}$ og d) -5.

Slike følger kallar vi geometriske. Talet vi multipliserer med, kallar vi kvotienten.

7 Eksempel

Ei geometrisk følge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ har $a_1 = 2$ og kvotient 3.

a) Finn dei fire fyrste ledda.

b) Finn ein rekursjonsformel for ledda.

c) Finn ledd nummer 20.

a) $a_1 = 2$

$a_2 = 2 \cdot 3 = 6$

$a_3 = 6 \cdot 3 = 18$

$a_4 = 18 \cdot 3 = 54$ //

b) $\underline{a_n = a_{n-1} \cdot 3, \quad n \geq 2}$

c) I staden for å gange med 3 19 gonger:
Finn eksplisitt formel.

For å få ledd nr. n, må vi gange 2
med 3 (n−1) gonger!

$$a_n = 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

Altså: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$$a_{20} = 2 \cdot 3^{20-1} = 2 \cdot 3^{19} = \underline{2324522934}$$

Generell formel: $\boxed{a_n = k^{n-1} \cdot a_1}$

7 Oppsummert

	Aritmetisk	Geometrisk
Rekursivt	$a_n = a_{n-1} + d$	$a_n = a_{n-1} \cdot k$
Eksplisitt	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$