TRFE 1000

Veke 19

(1) Undervising: Kor lenge?

Rep.: Korleis? Eksamensoppg.?

Invitasjon: Bok-lansering

(2) Fundamental-teoremet

Veit: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x$, $x_i = a + i \cdot \Delta x$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$n \to \infty$

Venstre Riemann-sum
(Eigentleg meir generelt)

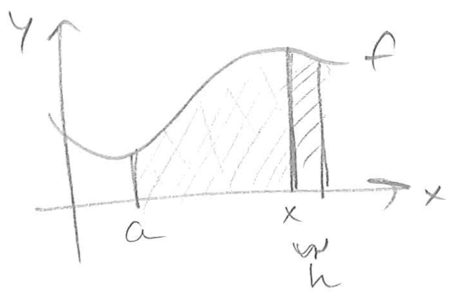
Men: Vi har alt brukt dette masse:
Hvis $F'(x) = f(x)$, er $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Dette er rett – men ikkje opplagd!

Det heiter fundamentalteoremet for algebra.

"Bevis"

Hugsar: Riemann-sum gir arealet under grafen når Δx_i-ane $\to 0$



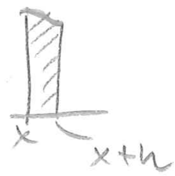
Lat $F(x)$ vere arealet under grafen frå a til x.

$\left(F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\right)$

– Skal vise at $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \quad \text{(Definisjon)}$$

$F(x+h) - F(x)$: Areal av smal "søyle"



$\approx f(x)\cdot h$

Dess mindre h blir, dess nærare er $F(x+h)-F(x)$ rektangel-arealet $f(x)\cdot h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = f(x)$$

Altså: $F(x)$ er <u>ein</u> anti-derivert til f.

Om $G(x)$ er ein annan $G'(x) = f(x)$:

$G(x) = F(x) + C$ ← konstant.

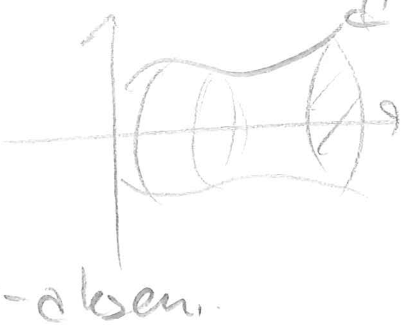
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =$$
$$(G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a)$$

Poeng: Vi kan bruke kva anti-derivert som helst; vi treng ikkje tenkje på C.

③ Meir bruk av integralet

Hugsar at

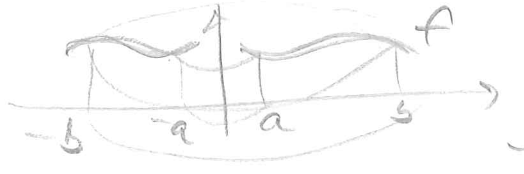
$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$



ved rotasjon om x-aksen.

Om y-aksen:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\,dx \qquad (f(x) \geq 0 \text{ på } [a, b])$$

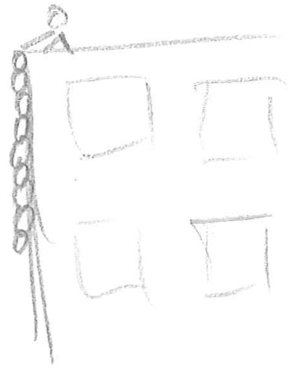


Litt fysikk:

Arbeid: $W = Fs$ - kraft gonger veg.

Men kva om krafta F er avhengig av vegen s?

Eksempel



Du skal dra opp $l = 10m$ kjetting som veg $\lambda = 2.0 kg/m$. Kor stort arbeid gjer du?

Tyngde: $G = mg$, $g = 9.8 m/s^2$

Etter at du har dratt opp x m:

- Treng bruke krafta $\lambda \cdot (l - x) \cdot g$
- For å løfte lengde Δx_i: $W_i = F(x_i)\Delta x_i$

Totalt: $W \approx \sum_{i=0}^{n-1} W_i = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i)\Delta x_i$

Δx_i-ane $\to 0$: $W \to \int_0^l F(x)\,dx$

$W = \int_0^l g\lambda(l-x)\,dx = g\lambda \int_0^l (l-x)\,dx =$

$g\lambda\left[lx - \frac{1}{2}x^2\right]_0^l = g\cdot\lambda\cdot(l\cdot l - \frac{1}{2}l^2 - 0) =$

$\frac{1}{2}g\lambda l^2 = \frac{1}{2}\cdot 9.8 m/s^2 \cdot 2.0 kg/m \cdot (10m)^2 = 980J$

- Arbeidet blir 980 J.

Gjennomsnitt

For ein funksjon $f(x)$ er gjennomsnitsverdien $\bar{f}$ på intervallet $[a, b]$ definert som

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Tips: Sjekk ut 9.6 i kompendiet!

Eksempel

Spenninga i stikkontakten går omtrent slik:

$$u(t) = 325 \sin(100\pi t)$$

med u gitt i Volt og tida t gitt i sekund.

a) Bestemm gjennomsnittsspenninga $\bar{u}$ over èin periode.

b) Bestem gjennomsnittet av u^2 over èin periode.

Periode: $p = \frac{2\pi}{k}$ der $f(x) = a \sin(kx)$

Altså: $p = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$

a) $\overline{u} = \frac{1}{P} \int_0^P u(t)\,dt = \frac{1}{P} 325 \int_0^P \sin(100\pi t)\,dt =$

$\frac{1}{\frac{1}{50}} 325 \cdot \left[-\frac{1}{100\pi} \cos(100\pi t) \right]_0^{1/50} =$

$-\frac{325 \cdot 50}{100\pi} \left(\cos\left(100\pi \cdot \frac{1}{50}\right) - \cos(100\pi \cdot 0) \right) =$

$-\frac{325}{2\pi} \left(\cos(2\pi) - 1 \right) = \underline{0}$

b) $\overline{u^2} = \frac{1}{P} \int_0^P (u(t))^2\,dt = \frac{1}{P} 325^2 \int_0^P \sin^2(100\pi t)\,dt$

Triks: $\sin^2(kx) = \frac{1 - \cos(2kx)}{2}$

$\overline{u^2} = \frac{1}{P} 325^2 \int_0^P \frac{1 - \cos(200\pi t)}{2}\,dt =$

$\frac{1}{2P} \cdot 325^2 \left[t - \frac{1}{200\pi} \sin(200\pi t) \right]_0^P =$

$\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{50}} \cdot 325^2 \left(\frac{1}{50} - 0 - \cancel{\frac{1}{200\pi} \left(\sin\left(200\pi \cdot \frac{1}{50}\right) - \sin 0 \right)} \right)$

$= \underline{\frac{1}{2} \cdot 325^2}$

RMS: Root mean square

$\sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 325^2} = \frac{325}{\sqrt{2}} = \underline{230}$

4 Meir bruk av den deriverte

Eksempel

Formuler tekstane nedanfor som likningar. Gi sjølv passande symbol for storleikane som inngår.

a) I eit stort land er fødselsrata slik at den naturlege tilveksten per år er 1.2 % av folketalet. Vidare opplever landet ein immigrasjon som i år er på ca. 100 000 og som etter det er venta å stige med ca. 15 000 per år.

b) Temperaturen i eit basseng er avtakande på grunn av at omgivnaden [omgivelsene] har lågare temp. Farten temperaturen avtar med er proporsjonal med temperaturdifferansen.

a) $F(t)$: Folketalet, i millionar, etter t år.

Farten F endrar seg med per tid: $F'(t)$

$\uparrow$

$\boxed{?}$

– To bidrag: 1) Naturleg tilvekst og
2) migrasjon.

1) $0.012 \cdot F(t)$

2) $0.1 + 0.015t$

Alt i alt:

$$F'(t) = 0.012 \cdot F(t) + 0.7 + 0.1 \cdot t$$

b) Temp. i basseng: $T(t)$

— " — omkring: T_0

Farten temperaturen endrar seg med:

$T'(t)$.

Modell: $T'(t) = k\,(T(t) - T_0)$

– Newtons avkjølingslov.

- Det vi gjorde no er eksempel på matematisk modellering.

- Vi tok „prosa" og observasjonar og formulerte det som likningar
- likningar som kan løysast.

Den ukjende: Ein funksjon

Den deriverte av funksjonen inngår i likninga.

? Kva kallar vi slike likningar?

→ Differensiallikningar.

5 Den enklaste typen differensiallikningar.

... har denne forma: $y' = f(x)$.

Eksempel

Løys desse differensiallikningane

a) $y' = x$

b) $y' = x e^{-x^2}$

- Skal finne y slik at $y' = x$.

Altså: Vi skal finne alle anti-deriverte til x.

a) $y = \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$

$y = \frac{1}{2} x^2 + C$

$\boxed{?}$ Kor mange løysingar har vi funne?

→ Uendeleg mange; vi får ei løysing for kvar mogeleg verdi av C.

b) $y = \int x e^{-x^2} dx$

$u = -x^2$, $dx = -\frac{1}{2x} du$

$y = \int x e^{u} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) du = -\frac{1}{2} \int e^{u} du =$

$$-\frac{1}{2}e^{u} + C' = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C'$$

$$y = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C'$$

Merk: Skrivemåten

$\int f(x)\,dx$ liknar veldig på

$\int_a^b f(x)\,dx$.

Det er kanskje uheldig; eit såkalla ubestemt integral, $\int f(x)dx$, er ein (ukjend) funksjon. (Det bestemte) Integralet, $\int_a^b f(x)\,dx$, er eit <u>tal</u>.

(?) Kva motiverar denne skrivemåten for antideriverte?

→ Fundamentalteoremet.

Neste gong:

– Skal <u>løyse</u> folketalsmodellen.