TRFE 1000

Veke 17

① Om innleveringa

Oppg. 2: OK med tilnærma verdiar
(bør ha 4 desimalar)

NB! Enkelte har enda ikkje fått godkjent nr. 2

Simpsons metode: <u>Ikkje pensum</u>

② Frå tysdag:

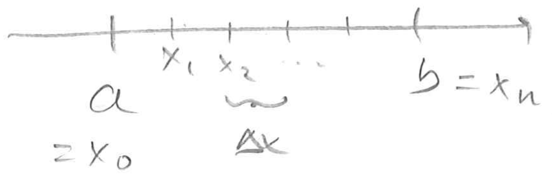
Riemannsum (venstre) og integral.

$$R_n = \sum_{n=0}^{n-1} \Delta x \, f(x_i)$$

$x_i = a + i \cdot \Delta x$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

(n=5)



→ MATLAB-demo

Når $n \to \infty$: $R_n \to \int_a^b f(x)dx$

Viktig:

Gjer oppg. 1 i kap. 9 i kompendium.

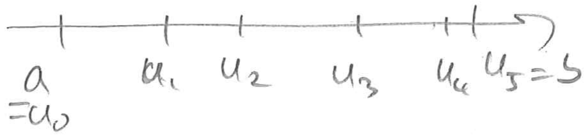
Meir generell Riemann-sum:

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \, f(x_i)$$

der vi har delt opp intervallet

$[a, b]$ slik:

$$[a,b] = [u_0, u_1] \cup [u_1, u_2] \cup \dots \cup [u_{n-1}, u_n]$$



$\Delta x_i = u_{i+1} - u_i$ og $x_i \in [u_i, u_{i+1}]$

→ MATLAB-demo.

Altså: Δx_i-ane treng ikkje vere jamstore, og x_i treng ikkje ligge i venstre ende.

Definisjon:

Dersom alle Δx_i-ane $\to 0$, går R_n mot integralet $\int_a^b f(x)\,dx$

Kommentarar

Gresk S.

- Likeande skrivemåte: $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$

  vs. $\int_a^b f(x)\,dx$.

- Dersom $f(x)\geq 0$ for $x\in[a,b]$:

  $\int_a^b f(x)\,dx$ er arealet under grafen 

- Men: Integralet <u>kan</u> ha negative bidrag

- Merk: Definisjonen har (i utgangspunktet) ingenting med anti-derivasjon å gjere!

  Har sett: Dersom $F'(x)=f(x)$, er

  $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Fundamental-teoremet for kalkulus

Venstre-summen vi har sett,

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \quad \text{med } x_i = a + i\cdot\Delta x,$$

er eit særtilfelle der alle Δx_i-ane er like og x_i er gitt ved u_i.

(3) „Teori-eksempel"

– Vi brukar det vi har sett før om anti-derivasjon og integral til å løyse desse to oppgåvene:

Eksempel 1

Ein taperull har indre radius $a = 3$ cm og ytre radius $b = 5$ cm. Tapen er $\Delta r = 0.01$ cm tjukk. Kor lang er han?

Eksempel 2

Ein lampeskjerm har fasong som ei avkappa kjegle med nedre radius $R = 20$ cm, øvre radius $r = 12$ cm og høgda $h = 17$ cm. Kor stort volum rommar han?

(1)

1)

Kor mange vindingar? $n = \frac{b-a}{\Delta x} = \frac{5-3}{0.01} = 200$

For kvar vinding aukar radiusen med Δx

Vindingar	radius	omkrets
0	a	$2\pi a$
1	$a + \Delta x$	$2\pi(a+\Delta x)$
2	$a + 2\Delta x$	$2\pi(a+2\Delta x)$
$\vdots$		
i	$a + i\cdot\Delta x$	$2\pi(a+i\Delta x)$

Med $x_i = a + i\cdot\Delta x$ får vi lengda

$$l = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi x_i$$

Riemann-sum: $l\cdot\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi x_i \cdot \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$

med $f(r_i) = 2\pi$

Dersom Δx er liten / n er stor:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \approx \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^b 2\pi x\,dx = 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_a^b = \pi(b^2-a^2)$$

$$l\Delta x \approx \pi(b^2-a^2)$$

$$l = \frac{\pi}{\Delta x}(b^2-a^2) = \frac{\pi}{0.01}(5^2-3^2) = 5026.5$$

Tapen er ca. 50 m lang.

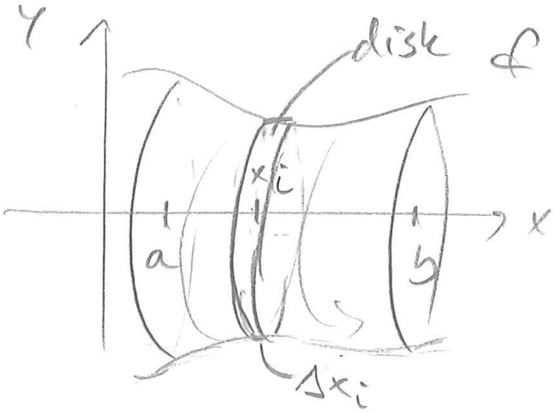
[?] Korleis kunne vi ha tenkt oss fram til at $l = \frac{\pi}{\Delta x}(b^2 - a^2)$ på strak arm?

Same areal

$A = \pi b^2 - \pi a^2$

NB: Her skulle vi eigentleg finne ein sum, som vi tilnærma med eit integral. Vanlegvis er det motsett.

2)



[?] Kva er radius til disken?

— " — arealet av — " —?

— " — Volumet av skiva?

$$\Delta V_i = \pi (f(x_i))^2 \cdot \Delta x_i$$

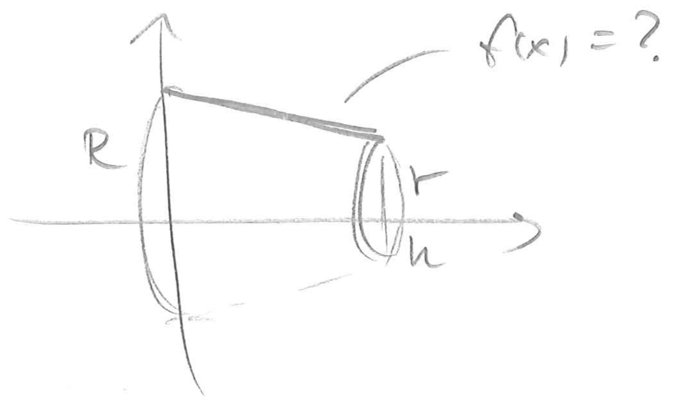
– Summerar alle desse frå $x=a$ til $x=b$

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta V_i = \sum_{i=0}^{n-1} \pi (f(x_i))^2 \Delta x_i \quad \to \text{Riemann-sum!}$$

Med $\Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

For lampeskjermen:



$$f(x) = ax + b$$

$$b = R = 20$$

$$a = \frac{r-R}{h} = \frac{12-20}{17} = -\frac{8}{17}$$

$$V = \pi \int_0^h f(x)\, dx = \pi \int_0^{17} \left(-\frac{8}{17}x + 20\right)^2 dx =$$

$$\pi \int_0^{17} \left(\frac{64}{289}x^2 - \frac{320}{17}x + 400\right) dx =$$

$$\pi \left[\frac{64}{867}x^3 - \frac{160}{17}x^2 + 400x\right]_0^{17} \approx 13583$$

Vasen rommar ca. <u>13.6 l.</u>

4 Trapesmetoden

Venstre-sum:

$$V_n = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Høgre-sum:

$$H_n = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

→ MATLAB-demo

Både H_n og $V_n \to \int_a^b f(x)\,dx$ når $n \to \infty$ / $\Delta x \to 0$. Men ikkje særleg fort!

Har sett

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{og} \quad \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \to f'(x)$$

når $h \to 0$. Men sakte.

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$ går <u>fort</u> mot $f'(x)$!

Vi prøver oss med gjennomsnittet igjen:

$$\frac{1}{2}(V_n + H_n) = \frac{1}{2}\Delta x \big(\underbrace{f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})}_{V_n}\big) +$$

$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n))$

$\nearrow$

$+$

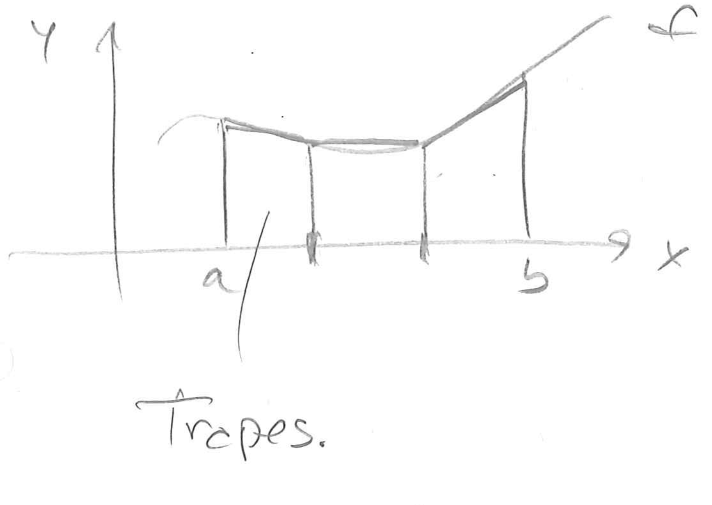
$= \frac{1}{2}\Delta x \left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right)$

$= \Delta x \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right)$

Trapesmetoden:

$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n$ der

$T_n = \Delta x \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right)$



$n = 3$

Eksempel

Bestem $\int_0^7 \cos^2 \sqrt{x}\,dx$ med minst tre rette desimalar.

$\longrightarrow$ MATLAB-skript – både venstre

Riemann-sum og trapesmetoden.

Eksempel

Følgande verdiar er gitt for funksjonen $f(x)$:

x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	1.000	0.8165	0.7071	0.6325	0.5774

a) Bruk tabellen til å estimere $f'(1.5)$ og $f'(1.75)$.

b) Bruk tabellen til å estimere $\int_0^2 f(x)\,dx$

c) Tabellen er laga med denne elementære funksjonen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Kor stor er feilen i estimata i a) og b)?

a) Midtpunktsformel for numerisk derivasjon:

$$f'(1.5) \approx \frac{f(2.0) - f(1.0)}{0.5} = \frac{0.5774 - 0.7071}{0.5}$$

$$= \underline{-0.1297}$$

$$f'(1.75) \approx \frac{f(2.0) - f(1.5)}{2 \cdot 0.25} =$$

$$\frac{0.5774 - 0.6325}{0.5} = \underline{-0.1102}$$

b) Trapesmetoden for numerisk integrasjon:

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx 0.5 \cdot \left(\tfrac{1}{2} f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + \tfrac{1}{2} f(2)\right) =$$

$$0.5 \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot 1.000 + 0.8165 + 0.7071 + 0.6325 + \tfrac{1}{2} \cdot 0.5774\right)$$

$$= \underline{1.4724}$$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} = u^{-1/2}$ med $u = x+1$

$$f'(x) = -\tfrac{1}{2} u^{-1/2 - 1} \cdot u'(x) = -\tfrac{1}{2} u^{-3/2} \cdot 1 =$$

$$-\tfrac{1}{2} (x+1)^{-3/2} = -\frac{1}{2(x+1)^{3/2}}$$

$$f'(1.5) = -\frac{1}{2 \cdot (1.5+1)^{3/2}} = \underline{-0.1265}$$

Feil i a): $|-0.1297 - (-0.1265)| = \underline{0.0032}$

(2.5 %)

$$f'(1.75) = -\frac{1}{2\cdot(1.75+1)^{3/2}} = \underline{-0.1096}$$

Feil: $|-0.1102-(-0.1096)| = \underline{0.00056}$

(0.5%)

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

Variabelbytte:

$u = x+1$

$u'(x) = 1, \quad du = dx$

$u(0) = 1, \quad u(2) = 3$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^3 u^{-1/2}\,du = \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{-1/2+1}\right]_1^3 =$$

$$2\left[\sqrt{u}\right]_1^3 = 2(\sqrt{3}-1) \approx 1.4641$$

Feil i trapesmetoden (med $n=4$):

$|1.4724 - 2(\sqrt{3}-1)| = \underline{0.0083}$

(0.6%)