TRFE 1000

Veke 14

① Eksempel: Ionisering av hydrogen-atom:

Ikkje pensum!

- Skildra ved ei partiell differensiallikning:

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(r)\Psi - iA(t)\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

Tidsderivert

Ein slags dobbelt-derivert i rom

z-derivert

V: Bølgefunksjonen – gir all informasjon om systemet. Men: På ein statistisk måte

Så på spørsmålet „stikk elektronet av eller ikkje?" får vi ikkje „ja" eller „nei" til svar, vi får eit sannsyn

→ Tabell og plott $P(F)$

– Lagar skript som estimerar $P(F)$

Hugsar:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Hvis h er liten nok:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(droppar „lim-en")}$$

Betre:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

– Midtpunktsformelen for numerisk derivasjon

Frå tabellen:

F	2.5	5	7.5	...
P	0.07	0.23	0.37	...

$$P'(5) \approx \frac{P(7.5)-P(5)}{2.5} = \frac{0.37-0.23}{2.5} = 0.056$$

Betre:

$$P'(5) \approx \frac{P(7.5)-P(2.5)}{2 \cdot 2.5} = \frac{0.37-0.07}{2 \cdot 2.5} = 0.06$$

Endå betre (midtpkt med kortare steglengde):

$$P'\left(5+\frac{2.5}{2}\right) = P'(6.125) \approx \frac{P(7.5)-P(5)}{\cancel{2} \cdot \frac{2.5}{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{P(7.5)-P(5)}{2.5} = 0.056$$

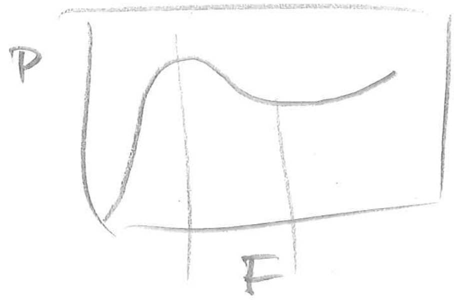
Lik framoverformelen!

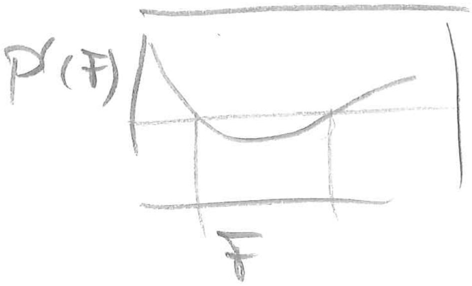
Altså: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ er eit <u>godt</u> estimat

for $f'(x+h/2)$!

(Og eit ganske dårleg eit for $f'(x)$.)

Lagar skript og plottar





Ser: $P'(F) = 0$ når P er maksimal/minimal.

$P'(F) > 0$ når $P(F)$ veks og

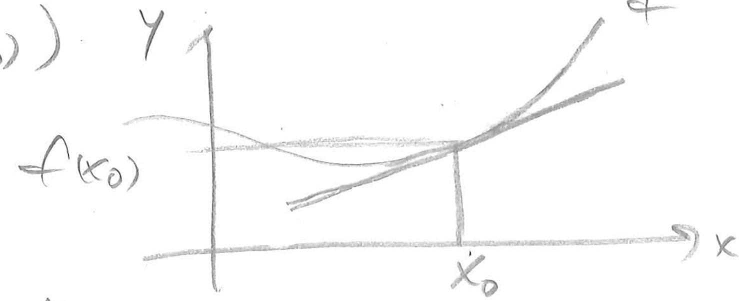
$P'(F) < 0$ når $P(F)$ avtar

$\boxed{?}$ Gamalt nytt.

Fysikk: $P(F)$ <u>avtar</u> når F aukar?!

(2) Lineær tilnærming

Har lært: $f'(x_0)$ er stigningstalet til tangenten til grafen til f i punktet $(x_0, f(x_0))$



I nærleiken av $(x_0, f(x_0))$ er grafen til f ganske lik tangenten.

Likening for tangenten

Linje: $y - y_0 = a(x - x_0)$

– stigningstal a, gjennom (x_0, y_0)

Tangent: $a = f'(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Altså: Når x ligg nær x_0, er

$$f'(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(jmf. figuren)

Eksempel

For funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

bestem likeninga til tangenten for $x = 1$

Når $x = 1.1$, kor stor er forskjellen

I nærleiken av $(x_0, f(x_0))$ er grafen til f ganske **lik** tangenten.

Likning for tangenten

Linje: $y - y_0 = a(x - x_0)$

– stigningstal a, gjennom (x_0, y_0)

Tangent: $a = f'(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Altså: Når x ligg **nær** x_0, er

$$f'(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(jmf. figuren)

Eksempel

For funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

bestem likninga til tangenten for $x = 1$

Når $x = 1.1$, kor stor er forskjellen

mellom f og linje? Enn når
$x = 1.5$?

Tangent: $y = f(1) + f'(1)(x-1)$

$f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

→ Plotte

$f(1.1) = \sqrt{1.1} = 1.0488$

Tangent: $\frac{1}{2} \cdot 1.1 + \frac{1}{2} = 1.05$ – Rimeleg nære

$f(1.5) = \sqrt{1.5} = 1.2247$

Tangent: $\frac{1}{2} \cdot 1.5 + \frac{1}{2} = 1.25$ – Ikkje så nære

Bruksområde:

- Hvis $f(x)$ er „krøkkete" og vi vet at $x \approx x_0$, kan vi gjøre problemet enklere ved å seie at $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Vi har feilestimat her. (Feilen er mindre enn $|\frac{1}{2} f''(c)(x-x_0)^2|$ for ein c mellom x og x_0 – ikkje pensum).
- Usikkerhet; hvis usikkerheten i x er Δx, er usikkerheten i $f(x)$ lik $\Delta f = f'(x) \cdot \Delta x$.

- Newtons metode

③ Newtons metode

Tanke: Hvis vi skal løyse eit vanskeleg problem, kan det vere ein god idè å erstatte det vanskelege problemet med eit lett eit som likenar.

- Vi veit å $f(x)=0$ kan vere vanskeleg.
- Har èin metode - kva for ein $\boxed{?}$
  → Halveringsmetoden.

Same figur: Hvis nullpunktet til $f(x)$ er vanskeleg å finne, finn nullpkt. til $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ i staden:

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

$$f'(x_0)(x-x_0)=-f(x_0)$$

$$x-x_0=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Fann vi løysinga no?

→Nei, men kanskje vi kom nærare.

- Sjansane er gode dersom x_0 ligg rimeleg nære det faktiske nullpunktet.

- Lat oss kalle den første „løysinga" vår for x_1 og prøve igjen:

$$f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0$$

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

- Dette kan vi gjenta; vi kan iterere:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

- Startar med å „tippe" på x_0.

- Finn x_1 frå x_0
- Finn x_2 frå x_1

$\vdots$

- Held på til dess $x_{n+1} \approx x_n$
- Forskjellen mellom x_{n+1} og x_n

seier noko om presisjonen.

Eksempel

Bruk Newtons metode til å finne løysinga av likninga

$$e^{x-2} - \frac{1}{x} = 0$$

med ein feil som er mindre enn 10^{-5}.

Først I kommandovindauga
Så i skript - for-løkke
Til sist: Med while-løkke.