TRFE 1000

Veke 13

① Om innleveringa?

② Eksempel

Farten til ein bil, i m/s, følger funksjonen $v(t) = \cos\frac{t}{2} + 0.15\,t^2$ for tida $t \in [0, 10]$ (gitt i s).

a) Kva er akselerasjonen $a(t)$?

b) Kor langt har bilen flytta seg på desse 10 sekunda?

Akselerasjon: $a(t) = v'(t) =$

$\left(\cos\frac{t}{2} + 0.15t^2\right)' = -\sin\frac{t}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)' + 0.15\cdot 2t =$

$-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} + 0.30t$.

b) Fart: $v(t) = s'(t)$ der $s(t)$ er strekninga.

$s(t)$ er altså ein anti-derivert til v:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int \left(\cos\frac{t}{2} + 0.15t^2\right)dt =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\frac{t}{2} + 0.15\cdot\frac{1}{2+1}t^{2+1} + C =$$

$$2\sin\frac{t}{2} + 0.05t^3 + C$$

„Forflytning":

$$\Delta s = s(10) - s(0) = \left(2\sin\frac{10}{2} + 0.05\cdot 10^3 + \cancel{C}\right) - \left(2\sin 0 + 0.05\cdot 0 + \cancel{C}\right)$$

$$= 2\sin 5 + 50 \approx \underline{48.08}$$

→ plotte i MATLAB

Poeng: Derivasjon og anti-derivasjon har vi sett før. Vi kan ein del reglar.

No: Meir fokus på kva den

derriverte er.

(3) Den deriverte

– Sin° s. 11 og 12 i notet for
veke 12.

Definisjon:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Eksempel

Vis at $(\sin x)' = \cos x$

Hjelpemiddel:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

(1)

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos x \sin h}{h} + \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} \right) =$$

$$\cos x \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} + \sin x \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0}$$

$$= \cos x \cdot 1 + \sin x \cdot 0 = \cos x$$

Altså: $(\sin x)' = \cos x$

Kvifor er $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$?

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} =$$

$$- \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1 \cdot 0 = 0 \quad \square$$

NB: Vi skal ikkje gjere analytisk derivasjon „frå scratch" vidare; dette var for å vise kvar det kjem frå.

Der er eit sett med derivasjons-reglar for elementære funksjonar. Dette har de alt sett, og de vil sjå meir til det i sommar.

Men kva gjer vi om funksjonen

ikkje er „pen"? Kanskje vi berre har han på tabellform.

Poeng: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ er $f'(x)$ når h blir „uendeleg liten". Kva om h er endeleg, men likevel liten?

- Vi droppar „lim":

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

NB!

Matematisk: Dess mindre $|h|$ er, dess nærare er brøken den deriverte.

- Testar numerisk; gjer oppg. 8.1 frå MATLAB-kompendiet saman.

Poeng: - h må heller ikkje bli <u>for</u> liten — <u>numerisk</u>.

- Vesentleg forskjell på numerisk og analytisk matematikk.

- Vi kjem nærare $f'(x)$ om

Vi brukar denne formelen i staden:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

– midtpunktsformelen for numerisk derivasjon.

Eksempel:
Oppg. 5a) frå eksamen august 2014.

Skal estimere $\phi'(2)$.
Framoverformel:

$$\phi'(2) \approx \frac{\phi(2.5) - \phi(2)}{0.5} \qquad (h = 0.5)$$

$$= \frac{2.30 - 1.94}{0.5} = \underline{0.72}$$

Betre:

$$\phi'(2) \approx \frac{\phi'(2.5) - \phi(1.5)}{2 \cdot 0.5} =$$

$$\frac{2.30 - 1.64}{1} = \underline{0.66}$$

Korleis kan vi estimere $\phi'(2.75)$?

$$\phi'(2.75) \approx \frac{\phi(3.00) - \phi(2.50)}{2 \cdot 0.25} \qquad (h = 0.25)$$

$$= \frac{2.71 - 2.30}{0.50} = \underline{0.82}$$

(4) Eksempel („Overture")

Oppg. 5 på eksamen frå oktober 2016

---

a) $v'(t)$: Akselerasjon, kor fort farten endrar seg i forhold til tida.

Om farten ikkje endrar seg, kva er $v'(t)$ då?

$$\rightarrow \quad v' = 0$$

- Set dette inn i likninga som inneheld v:

$$0 = -10 - 0.10\,v$$

$$v = \frac{10}{-0.10} = -100.$$

Maksimalfart (i absoluttverdi): $\underline{100 \text{ m/s}}$

$= 360$ km/h.

b) Viser det ved å sette inn.

Startkrav: $v(0) = 20$ (oppover).

Stemmer det med uttrykket?

$$v(0) = 120\,e^{-0.1\cdot 0} - 100 = 120\cdot 1 - 100 = 20$$

Sjekkar modellen, differensiallikninga:

$$v'(t) = 120\,e^{-0.1t}\cdot(-0.1t)' - 0 =$$

$$-0.1\cdot 120\,e^{-0.1t} = -12\,e^{-0.1t}$$

Høgreside:

$$-10 - 0.10\,v = -10 - 0.10\,(120\,e^{-0.1t} - 100) =$$

$$-10 - 12\,e^{-0.1t} + 10 = -12\,e^{-0.1t} = v'(t)$$

☺k

Til sommaren:
- Skal lære korleis vi kjem fram til $v(t)$.

$\boxed{?}$ Kva er $\lim_{t\to\infty} v(t)$ (vassrett asymptote)?

$e^{-0.1t}$ går mot null når $t\to\infty$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 120\cdot 0 - 100 = -100 \quad \text{(m/s)}$$

(gamalt nytt i sjå a))

Plotte i MATLAB?

c) La oss kalle høgda $h(t)$.

$\boxed{?}$ Korleis er denne relatert til v?

$\rightarrow h'(t) = v(t)$

Maksimal høgde: $h'(t) = 0$

Altså $v(t) = 0$ (rimeleg, sant?)

$$120 e^{-0.1t} - 100 = 0$$

$$e^{-0.1t} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

$$-0.1t = \ln \frac{5}{6}$$

$$t = \frac{\ln \frac{5}{6}}{-0.1} = +\underline{10 \ln \frac{6}{5}} \approx 1.823 \quad \text{(sek.)}$$

Kor høgt?

$$h(t) = \int v(t)\, dt$$

$$= \int (120 e^{-0.1t} - 100)\, dt =$$

$$\frac{120}{-0.1} e^{-0.1t} - 100t + C =$$

$$-1200 e^{-0.1t} - 100t + C$$

Korleis bestemmer vi C?

Startkrav? Les b) nøye: $h(0)=0$

$$-1200\,e^{-0.1\cdot 0}-100\cdot 0+C=0$$

$$C=1200$$

$$h(t)=-1200\,e^{-0.1t}-100t+1200=$$

$$1200\left(1-e^{-0.1t}\right)-100t$$

For $t\approx 1.823$:

$$h(1.823)=1200\left(1-e^{-0.1\cdot 1.823}\right)-100\cdot 1.823$$

NB: Bruk minnet på kalkulatoren!

$h(1.823)=\underline{17.678}$ (meter)