

TRFE 1000

Velee 12

① Info?

Om I spørre om hjelp.

② Grenseverdier

Så sist:

Kontinuitet: Kan tellene groten utan
I løfte glyanten frå papiret.

- Lite endring i x gir lite
endring i $f(x)$

- $f(x+h) \approx f(x)$ når $|h|$ er liten.

I dag: Skal definere kontinuitet -
brukar grenseverdi-begrepet [begrepet].

Eksempel

Givet: $f(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 3x}$

a) Kva nærmar f seg når x nærmar seg 2?

b) Kva nærmar f seg når x nærmar seg 3?

c) Kva nærmar f seg når x blir stor?

- MATLAB - plott.

ser ut til at svaret er

a) 3, b) ≈ 2.7 , c) 2.

a) - Rein innsetting, $f(3) = 3$

Poeng: f er kontinuerleg for $x=3$.

b) MATLAB-skript; ser på $f(x+h)$ for stadig mindre h (positive og negative).

Skript: PlottGrense.m

c) $y=2$ er vanntrett asymptote for f .

Også: $x=0$ er loddrett asymptote.

Matematisk notasjon:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 3x} \approx 2.7$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 3x} = 2$$

-Viser b) og c) med papir og blyant:

Faktoriserer:

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = 1 \pm 2$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x - (-1))(x - 3) = 2(x - 3)(x + 1)$$

$$x^2 - 3x = x(x - 3)$$

$$\frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 3x} = \frac{2(x - 3)(x + 1)}{x(x - 3)} = \frac{2(x + 1)}{x}$$

for alle x utenom 3

Men: x skal ikke vere 3, den skal nerme seg 3.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x+1)}{x} \stackrel{\text{kont.}}{=} \frac{2 \cdot (3+1)}{3} = \frac{8}{3} \\ (= 2.666 \dots)$$

For å bestemme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 3x}$:

Deler på høyeste potens av x i
numerator:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 4x - 6) \cdot \frac{1}{x^2}}{(x^2 - 3x) \cdot \frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}}$$

$$\left(\frac{4}{x}, \frac{6}{x^2}, \frac{3}{x} \rightarrow 0 \text{ når } x \rightarrow \infty \right) \quad \swarrow \text{"går mot"}$$

$$\dots = \frac{2 - 0 - 0}{1 - 0} = \underline{2}$$

Også: $f(x)$ når $x \rightarrow 0^{(+)}$.

Grenseverdi:

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ betyr at vi kan få

f til å ligge så nær L vi vil
ved å la x ligge nær nok c .

• Merk at x ikke er like c ;
 $f(c)$ treng ikke være like L .

• Dersom den er det, seier vi
at f er kontinuert for $x=c$.

Kontinuitet

f er kontinuert for $x=c$



$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

• Merk at for at grenseverdien
 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ skal være veldefinert, må
vi få samme grense uavhengig
av hva side x nærmer seg c
fra



I matematikk-notasjon:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

← Ensidige
grenser

Uendelige grenser:

" $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ " betyr at vi kan få f til å ligge så nær L vi vil ved å gjøre x stor nok.

(Tilsvarende for $\lim_{x \rightarrow -\infty}$)

Eksempel

Bruk MATLAB til å estimere disse grensene

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^5} \ln(1 + e^{-x^5})$ (jmf. oppg. 4.1.2)

— Justere skript.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ vist i læreboka

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^5} \ln(1 + e^{-x^5}) = 1$ kan vist ved

L'Hôpital's regel, som vi skal lære senere.

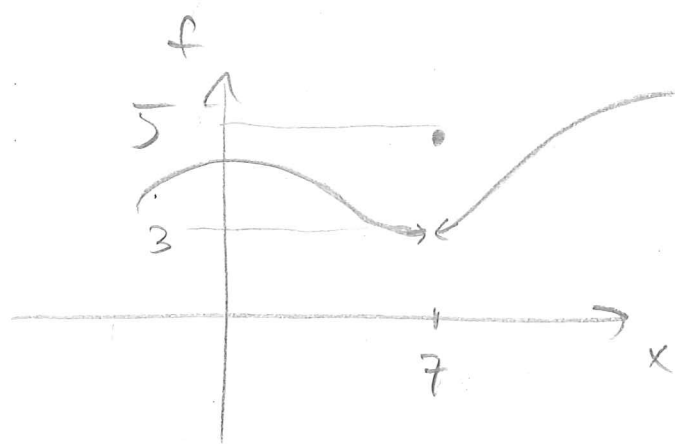
Hvis tid: Viser $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ (s. 152, 153 i lærebogen)

③ Kontinuitet

f kont. for $x=c \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Korlæs ser det ud når det ikke er kontinuert?

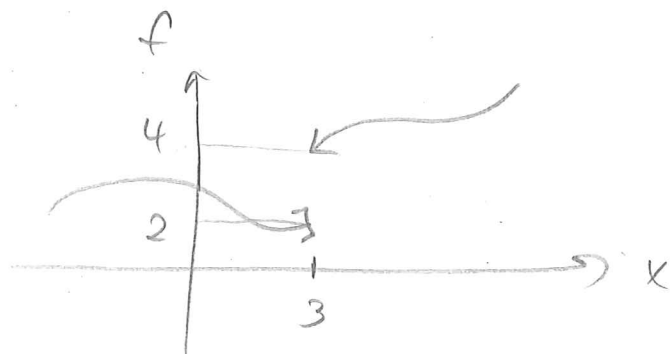


$$f(7) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 3$$

Ulike

- Diskontinuert for $x=7$



$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ er ikke definert.

-7- - Diskont. for $x=3$.

Eksempel

Er disse funktionerne discontinue-
erlige nokon sted?

$$a(x) = |x| \quad (\text{absolutt verdi})$$

$$b(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$c(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

← Delt

$$d(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

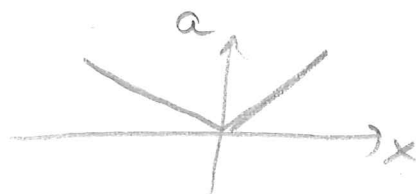
← Forskrift



$$|x| = x \text{ når } x \geq 0, \quad |x| = -x \text{ når } x < 0$$

Kan skrive (delt forskrift):

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



Einaste kandidat til diskontinuitet: $x=0$

$$a(0) = |0| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = -0 = 0$$

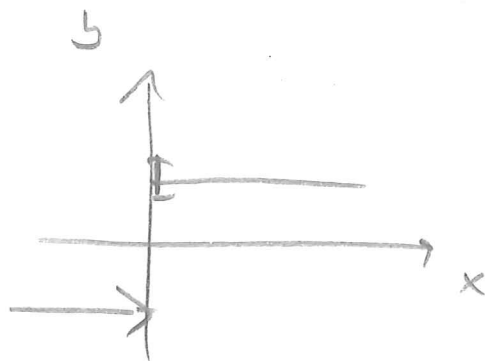
$$\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = 0 = a(0). \quad a(x) \text{ er kont. for alle } x.$$

$$b(x) = \frac{x}{|x|}$$

$$x > 0: \quad b(x) = \frac{x}{+x} = 1$$

$$x = 0: \quad b(x) = b(0) = 1$$

$$x < 0: \quad b(x) = \frac{x}{-x} = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b(x) = b(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} b(x) = -1$$

- Diskont. for $x=0$

Kontinuerleg ellers.

$$\sin \frac{1}{x}: \quad \frac{1}{x} \rightarrow \pm \infty \text{ når } x \rightarrow 0.$$

$\sin \frac{1}{x}$ ligg alltid mellom -1 og 1. Men

$\sin \frac{1}{x}$ vil "vingle" stadig raskere mellom -1 og

1

→ Pløtte i MATLAB

Pøeng: $\lim_{x \rightarrow 0} c(x)$ er ikke definert.

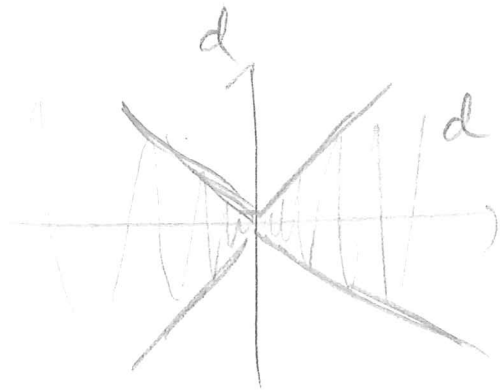
Funksjonen er diskontinuerleg for

$x=0$.

d(x)

Veit at $\sin \frac{1}{x} \in [-1, 1]$

Det betyr at $x \sin \frac{1}{x}$ alltid er mindre eller like $|x|$ og større eller like $-|x|$



$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

Men:

Siden $\lim_{x \rightarrow 0} -|x| =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

er også $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = d(0)$.

d er kontinuerlig for $x=0$ (og alle andre x også).

Squeeze-teoremet:

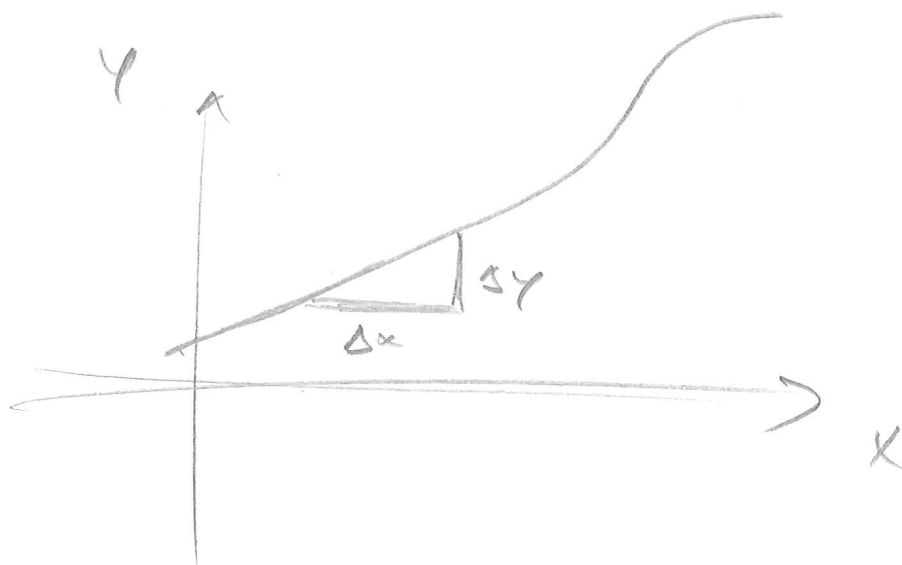
Dersom $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ for alle x nær c og

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L, \text{ er også}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L.$$

④ Den deriverte

Google maps: Skolebakken



Kor bratt?

Stigning (i %?): $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Men hva er stignings mot slutten?

Þengi: For δ kunne snakke om stigning i et punkt, ikke et intervall, når intervaller bli ekstremt småt.

- Vi ser på $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ når $\Delta x \rightarrow 0$.

Dette er den deriverte. Med $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Vanlegare: "h" i staden for "Δx"

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Utan samantaleining den viktigaste grenseverdien i dette kurset?

Man kva gjer vi om vi ikkje har ein "sull og grei" f ? Eller når vi berre har $f(x)$ for nokre x -verdiar - jmf. eksempel 5.1.2 side 180.

Jo, vi brukar ein endeleg h (i staden for ein uendeleg liten h) og håpar denne er "liten nok"

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{utan "lim"})$$