TRFE 1000

Veke 12

1 Bestiledar

- Om opplegget i sommar
- Innleveringar

2 MATLAB-eksempel (repetisjon)

ABC-formel for 2.-gradslikningar
if-sats: Sjekker at likninga har reelle løysingar.

Såg på for-løkker sist veke, rekna ut summar.

③ Kontinuerlege funksjonar

„Arbeidsdefinisjon":

f er kontinuerleg (på eit intervall) dersom vi kan teikne grafen til f utan å løfte blyanten av papiret.

- Ei lita endring i x gir ei lita endring i f.

NB: Slik er det ikkje alltid

Eksempel:

- Makk i eple
- Vatn når temp. endrar seg frå 0.01°C til -0.01°C.

Andre eksempel på diskontinuerlege fenomen:

- Steinen som blir slept (jmf. kap. 4.1 i læreboka)

- Superleiing (bilde)
- Volumet er ein „gass" i det temp. går frå meir enn fordampingstemperaturen til mindre enn denne (100°C for vassdamp).
- Andre $\boxed{?}$

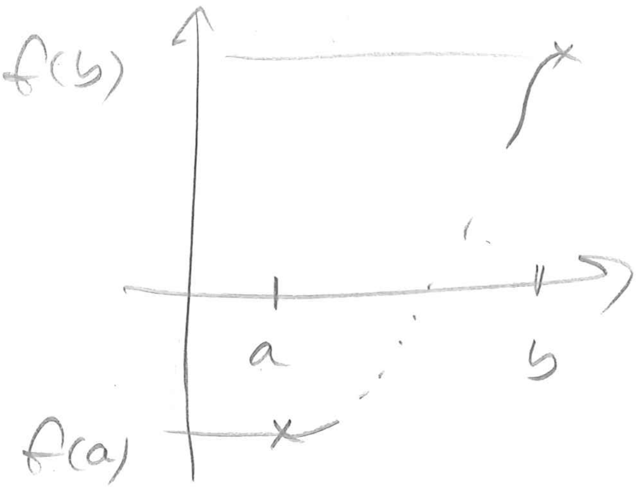
- Skal definere kontinuitet noko meir presist seinare.

(4) Skjæringssetninga

Dersom ein funksjon $f(x)$ er kontinuerleg på intervallet $[a,b]$ og $f(a)$ og $f(b)$ har ulike forteikn, må f ha (minst) eit nullpunkt på intervallet $[a,b]$.

(Alt så: Det finst minst èin $c \in [a,b]$ som er slik at $f(c)=0$.)

$\boxed{?}$ Opplagd?



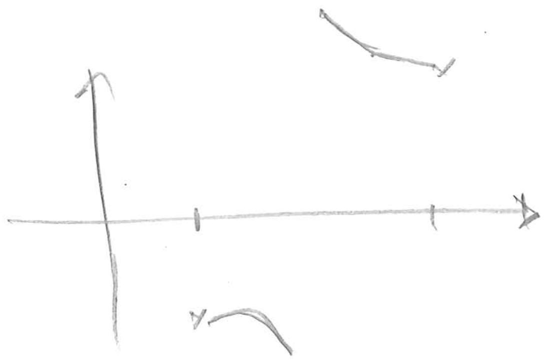
$f(a) < 0$

$f(b) > 0$

$\left(f(a)\cdot f(b) \overset{\boxed{?}}{<} 0\right)$

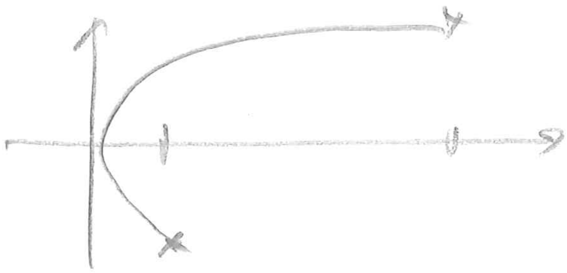
Kvifor <u>må</u> f skjere x-aksen?

Kvifor ikkje slik



→ ein slik f vil ikkje vere <u>kontinuerleg</u>.

eller slik



→ f ikkje eintydig; ikkje ein funksjon.

Eksempel (eksamensoppgåve)

Gitt funksjon: $f(x) = \cos x - 2x$

a) Forklar kvifor f har minst eitt nullpunkt i intervallet $[0, \pi]$

b) Forklar kvifor f har berre eitt nullpunkt på intervallet.

c) Forklar korleis vi kan avgrense dette nullpunktet til eit intervall med breidde $\pi/8$.

d) Om du skal avgrense feilen/usikkerheten i svaret til (mindre enn) 10^{-5}, kor mange gonger må vi gjenta prosedyren frå c)?

---

a) f er kontinuerleg (elementær funksjon definert på heile intervallet).

$f(0) = \cos 0 - 2 \cdot 0 = 1 > 0$

$f(\pi) = \cos \pi - 2\pi = -(2\pi + 1) < 0$.

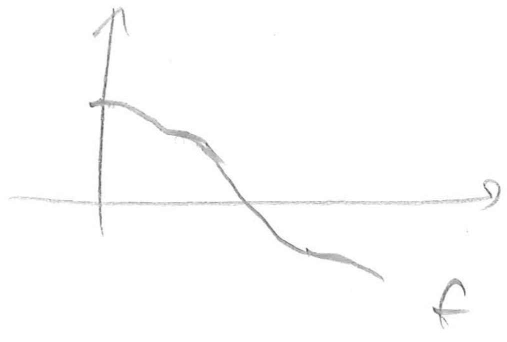
f har difor nullpkt. på $[0, \pi]$ ved skjæringssetninga.

b) $f'(x) = -\sin x - 2$

$|\sin x| \leq 1$

Difor er $f'(x) < 0$ for alle x.

f er alltid avtakande og kan difor berre krysse x-aksen éin gong. f har difor berre eitt nullpunkt på $[0, \pi]$.



c) Kva med $f(\frac{\pi}{2})$?

$f(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi < 0$

Nullpkt. mellom 0 og $\frac{\pi}{2}$

Kva med $\frac{1}{2}(0 + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$?

$f(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2} = -0.8637 < 0$

Nullpkt. mellom 0 og $\frac{\pi}{4}$

Nytt midtpunkt: $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(0 + \frac{\pi}{4})$

$f(\frac{\pi}{8}) = 0.1385 > 0$

Nullpkt. mellom $\frac{\pi}{8}$ og $\frac{\pi}{4}$

– Og slik kan vi halde på ...

d) For kvar gong: Halverer intervallet

Etter N halveringar: Breidde $(\pi - 0)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^N$

Skal ha $\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^N < 10^{-5}$

$$\frac{\pi}{2^N} < 10^{-5}$$

$$2^N > \pi \cdot 10^{+5}$$

$$N > \frac{\ln(\pi\cdot 10^5)}{\ln 2} = 18.26$$

Altså: – Må gjere $\underline{19 \text{ iterasjonar}}$

Dette høyrest ut som ein jobb for ... $\boxed{?}$

→ MATLAB.

5) Halveringsmetoden

– Skriv skriptet saman

(Lagt ut på Fronter)

Betring: Legg inn (anonym) funksjon, lar talet på iterasjonar, „N", vere gitt tidleg (input).
(Gi N via formel for presisjon?)

Poeng: Gitt likning med kont. uttrykk som endrar forteiken på eit gjeve intervall, kan vi løyse kva likning som helst – kor nøyaktig vi vil!

(Tenk litt på det.)

Eksempel

Finn alle løysingar av denne likeninga:

$$x^5 - 3x^4 - 10x^3 + 2x^2 - 11x = -5.$$

Feilen i kvart av svara skal vere mindre enn 10^{-4}.

Først: Lage plott, gjerne frå -500 til 100 på y-aksen i dette tilfellet.

– Ser ut til å vere tre nullpunkt.

For kvart av dei:

Bestemme passe intervall, talet på iterasjonar og oppdatere skript.

– Viser seg: $x=5$ er ei eksakt løysing; då brukar vi heller den.

Til sist: Introdusere while-løkker.

⑥ Hvis tid: Nemne formel def. av kontinuitet.