TRFE 1000 6/3 -17

(1) Innlev. 1: Siste frist i dag om
det ikkje var godkjend
ved første forsøk.

Innlev. 2: - Lagt ut i dag. Frist: 20/3
- Alle oppg. utanom ei
kan gjerast no.

I dag: Ferdig med lin. alg.

(2) Ei rad med ekvivalensar

- Tar utgangspunkt i ei
kvadratisk matrise A (n×n).

[?] Dersom A kan radredduserast
slik at der er eit leiande tal
i kvar søyle (og rekke), kva

meir kan vi seie om A?

$$A \sim \begin{pmatrix} \square & * & * & \cdots \\ 0 & \square & * & \cdots \\ 0 & 0 & \square & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$\square$: $\neq 0$

$*$: kva som helst

? Likn. $A\vec{x} = \vec{b}$:

Tot.matr.: $(A|\vec{b}) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \square & * & & * \\ 0 & \square & \cdots & * \\ & \vdots & & * \end{array}\right)$

Leiande tal i kvar søyle

– Eintydig løysing

? Om vi fortset radreduksjonen til red. trappeform:

$\rightarrow \boxed{A \sim I_n}$

? Kva med den homogene likninga

$A\vec{x} = \vec{0}$?

– Berre triviell løysing, $\vec{x} = \vec{0}$

Problematisere: Særtilfelle av at $A\vec{x}=\vec{b}$ har eintydig løysing?

Ja, men implikasjonen går den andre vegen også (jmf. $\vec{x}=\vec{x}_p+\underset{\vec{0}}{\underset{\uparrow}{\vec{x}_h}}$)

? Dersom $A\vec{x}=\vec{0}$ berre har løysinga $\vec{x}=\vec{0}$, kva kan vi seie om søylene i A?

Med $A=(\vec{v}_1|\vec{v}_2|\dots|\vec{v}_n)$, $\vec{v}_i$: Søylevektorar i $\mathbb{R}^n$

$$A\vec{x}=x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2+\dots+x_n\vec{v}_n=\vec{0}$$

– berre mogeleg med $x_1=x_2=\dots=x_n=0$

→ Lin. uavh.

? Med $A\sim I_n$: $(A\,|\,I_n)\sim(I_n\,|\,\underset{A^{-1}}{\underset{\uparrow}{?}})$

A er invertibel.

Påstand frå førre veke:

A invertibel $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

Ekvivalensar:

For ei $n \times n$-matrise A er følgande påstander ekvivalente (hvis éin er sann, er alle dei andre også sanne):

A kan radreduserast til ei trappeform med leiande tal i kvar søyle

$\Updownarrow$

Likninga $A\vec{x}=\vec{b}$ har alltid eintydig løysing (uansett $\vec{b}$)

$\Updownarrow$

$A \sim I_n$ (A er radekvivalent med identitetsmatrisa)

$\Updownarrow$

Den homogene likninga $A\vec{x}=\vec{0}$ har berre den trivielle løysinga $\vec{x}=\vec{0}$

$\Updownarrow$

Søylene i A er lineært uavhengige

$\Updownarrow$

A er invertibel (det finst ei inversmatrise for A, A^{-1}).

$\Updownarrow$

$\det A \neq 0$

③ Determinanten

- Her alt sett korleis han er definert for 2×2-matriser:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

skrivemåte

Eksempel

Med $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ er

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 7 \cdot 1 = 8$$

Merk: $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ og $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ er

<u>veldig</u> ulike ting!

Meir generelt

For en 3×3-matrise:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-1 - 2\cdot(-5)) - 7\,(4 - 2\cdot(-2)) + 2\,(4\cdot(-5) - (-1)\cdot(-2))$$

$$= 3\cdot 9 - 7\cdot 8 + 2\cdot(-22) = \underline{-73}$$

- Kontrollér i MATLAB

Dette kallar vi kofaktor-ekspansjon;

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ er kofaktoren til elementet

i 1. rekke, 1. søyle

$-\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ er kofaktoren i rekke 1, Søyle 2.

Definisjon

For ei kvadratisk matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

er kofaktor $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ der M_{ij} er determinanten til matrisa vi får til matrisa vi får om vi stryke rekke i og søyle j i A.

Determinanten til A, $\det A$, er

$$\underbrace{a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} + \dots + a_{1n} C_{1n}}_{}$$

Kofaktorekspansjon

– Det var dette vi gjorde i steg 1

$a_{11} = 3$, $C_{11} = \underset{+}{(-1)^{1+1}} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$

$a_{12} = 7$, $C_{12} = \underset{-}{(-1)^{1+2}} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, $a_{13} = 2$, $C_{13} = \underset{+}{(-1)^{1+3}} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$

Merk: Vi definerar det. til ei $n \times n$-matrise ut frå $(n-1) \times (n-1)$-determinantar

I eksempelet: Fann ein 3×3 det. som ein sum av 3 2×2 det.

(4) Korleis reknar vi ut determinantar i praksis?

To „triks"

1) Når vi gjer kofaktorekspansion, kan vi gjere det langs kva rekke eller søyle som helst

2) Vi kan bruke rekkeoperasjonar til å gjere utrekninga enklare.

Eksempel

Bruk kofaktor-ekspansion langs rekke 2 og langs søyle 3 til å rekne ut den same determinanten som i stad.

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -4\,(7+10) - (3-(-4)) - 2(-15-(-14)) =$$

$$-4\cdot 17 - 7 + 2 = \underline{-73}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = +2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(-22) - 2\cdot(-1) + (-31)$$

$$= \underline{-73}$$

„Sjakkbrettet"

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Eksempel

Regn ut determinanten til disse matrisene

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & \pi & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 18 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 79 \\ 0 & 0 & 2 & 15 & 99 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Vi kan velge kva rekke/søyle som helst, kva bør vi velge?

$\to$ rekke 3

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & \pi & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 18 & 1 \end{vmatrix} = \left(0 \cdot C_{31} + 0 \cdot C_{32} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\right)$$

einaste som „overlever"

$$= +2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(-2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 2 \cdot (-2(1+8) + (-8) - 3) = -58$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 & \cdots \\ 0 & 1 & 4 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & \cdots \\ 0 & 2 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) = \underline{-10}$$

Triangulær matrise

- Kvadratisk matrise der alle tal under diagonalen, eller alle tal over diagonalen er null.
- For slike matriser er determinanten lik produktet av elementa langs diagonalen.

Rekkeoperasjonar

- Når vi byter om to rekker, skiftar determinanten forteikn.
- Når vi gangar ei rekke med eit tal, blir også determinanten gonga med dette talet.
- Når vi legg eit multiplum av ei rekke til ei anna, blir ikkje determinanten endra.

Dette kan vi utnytte til å gjere determinanten „triangulær".

Eksempel

Bruk rekkereduksjon til å bestemme den „same gamle" determinanten.

$$\boxed{?}$$

$$\begin{array}{c c}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array}\end{array} = \begin{array}{c c}\begin{vmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} 4 \quad -2 \\ \\ \\ \end{array}\end{array} =$$

$$\begin{array}{c c}\begin{vmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 0 & 31 & 2 \\ 0 & -21 & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \frac{21}{31} \\ \\ \end{array}\end{array} = \begin{vmatrix} -1 & 8 & 0 \\ 0 & 31 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{73}{31} \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot 31 \cdot \frac{73}{31} = \underline{-73}$$

Alternativt:

$$\begin{array}{c c}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \frac{2}{3} \\ \\ 2 \end{array}\end{array} = \begin{array}{c c}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & -11 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow 3 \end{array}\end{array} =$$

$$\frac{1}{3}\begin{array}{c c}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ -11 \end{array}\end{array} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -73 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -73 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\cdot 3\cdot(-1)\cdot(-73) = \underline{-73}$$

5. I morgon: Litt om for-løkker i MATLAB