TRFE 1000

Veke 7

① Info ?

② Om talet på løysingar for lineære likningssystem.

[?] Kva alternativ finst ?
→ inga, èi og uendeleg mange

[?] Om totalmatrisa til eit liknings-system kan skrivast som

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right),$$

kva er løysinga?

? # variable?

$\to 5$

? Kva for nokre er frie og kva for nokre er bundne?

Fri: x_3 og x_4

$x_1 = 4 - 3x_3 - 2x_4$

$x_2 = -2 - 2x_3 + 7x_4$

x_3, x_4: Frie

$x_5 = 5$

Vektorform:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3x_3 - 2x_4 \\ -2 - 2x_3 + 7x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

s? t?

– Hyperplan i $\mathbb{R}^5$

Oppsummert:

Leiande tal i siste søyle: Inkonsistent.

Leiande tal i alle andre, men ikkje i siste: Èi løysing.

Ellers: Uendeleg mange.

Eksempel

Kvar av desse matrisene er totalmatrisa til eit likningssystem – redusert til trappeform. I kvart tilfelle: Kor mange løysingar har likningssystemet?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

---

a) Èi, b) Inga, c) Èi, d) Uendeleg

Eksempel

Kva må t vere for at likningssystemet skal vere inkonsistent?

$$(2-t)x + (3t-2)y = 2$$
$$x + ty = 2$$

Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 2-t & 3t-2 & 2 \\ 1 & t & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(2-t) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ 0 & t^2+t-2 & 2t-2 \end{pmatrix}$$

$-t(2-t)+3t-2$
$= -2t+t^2+3t-2 =$
t^2+t-2

$-2(2-t)+2 =$
$2t-2$

Inkonsistent: $t^2+t-2=0$ og $2t-2 \neq 0$

$t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \dfrac{-1\pm 3}{2}$

$t = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ eller $t = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

$2t-2 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \frac{2}{2} = 1$

Altså: Inkonsistent når $\underline{t=-2}$

$t=1$: Uendeleg mange løysingar

Ellers ($t \notin \{-2, 1\}$): Éi løysing

③ Matriseprodukt

Sjå notat frå veke 6, frå side 11.

Matrise-addisjon: „Straight forward"

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+4 & 0-7 & 7+2 \\ -1+0 & 2+1 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 9 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Skalar-multiplikasjon: Også „straight forward":

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 0 & 2\cdot 7 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 & 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 14 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

? For at summen $A+B$ skal vere definert, kva må gjelde for formata til A og B?

→ Dei må vere like.

[?] Så kva manglar vi av aritmetiske operasjonar?

- Har $\cdot$ og $+$

$-$: $A - B = A + (-1)B$ (også for tal)

- „Manglar" division.
- Finst ikkje!

For tal: „$a : b$" betyr

$a \cdot b^{-1}$ der b^{-1} er det talet

som er slik at vi får 1 (eininga [enheten]) når vi gangar med b; $b^{-1} \cdot b = b \cdot b^{-1} = 1$.

For matriser: Har invers i visse tilfeller.

Men først: Må ha „eining".

Eksempel

$$\text{Med: } \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{3\times 1\text{-matrise}}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{og } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Vis at $I_3\vec{x} = \vec{x}$, $I_3 A = A$ og $B I_3 = B$.

Vis at $AB = I_3$.

$$I_3\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$I_3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 0\cdot 2 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 0\cdot 3 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 2 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 0\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 2 & 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 2 + 0\cdot 3 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$BI_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + (-2)\cdot 0 & 3\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 3\cdot 0 - 2\cdot 0 - 2\cdot 1 \\ 6 - 0 - 0 & 0 - 4\cdot 1 - 0 & 0 - 0 - 5\cdot 1 \\ -1 + 0 + 0 & 0 + 1 + 0 & 0 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3+0-2 & -2+0+2 & -2+0+2 \\ -3+6-3 & 2-4+3 & 2-5+3 \\ 6-6+0 & -4+4+0 & -4+5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Generelt: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$I_1 = (1)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Blir kalla identitetsmatrisa fordi $AI_n = A$ og $I_m A = A$ for <u>alle</u> $m \times n$ - matriser A

- Liknar på 1 for tal; $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ - uansett kva a er.

No kan vi definere invers-matrisa

For ei $n \times n$ - matrise A:

Dersom det finst ei matrise B som er slik at $AB = BA = I_n$ seier vi at A har B som inversmatrise, $A^{-1} = B$.

Merk:

- Definerar A^{-1} berre for $n \times n$ - matriser - altså matriser med like mange rekker som søyler. Slike matriser kallar vi <u>kvadratiske</u> matriser.

- Ikkje alle kvadratiske matriser <u>har</u> ein invers; ikkje alle er

invertible. (Korleis er det med tal ?
→ 0 har ingen invers)

- Dersom $AB = I_n$, vil også BA vere lik I_n (kan vissast).

Vi minner om at for matriser er AB generelt ulik BA.

Korleis bestemmer vi A^{-1} ?

Eksempel

Løys likningssystema

a) $x + 2y = 1$
$2x + 5y = 2$

b) $x + 2y = -7$
$2x + 5y = 12$

Merk: Same koeffisientar. Same rekke-operasjonar?

Vi „limer saman" totalmatrisa til ei:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & 5 & 2 & 12 \end{array}\right) \overset{-2}{} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 26 \end{array}\right) \overset{}{-2} \sim$$

$$\begin{array}{cccc} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & -59 \\ 0 & 1 & 0 & 26 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \end{array} \end{array}$$

a) $x = 1, \ y = 0$

b) $x = -59, \ y = 26$

Poeng: løyste begge likningssystema i eitt.

Når vi skal finne A^{-1}:

B slik at $AB = I_n$

Med $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ etc. og

$B = (\vec{x}_1 | \vec{x}_2 | \dots | \vec{x}_n)$:

$$A(\vec{x}_1 | \vec{x}_2 | \dots | \vec{x}_n) = (\vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \dots | \vec{e}_n)$$

n likningar:

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \ A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, \ \dots, \ A\vec{x}_n = \vec{e}_n$$

Stor felles totalmatrise:

$$(A \mid I_n) \sim (\vec{e}_1 \mid \vec{e}_2 \mid \cdots \mid \vec{e}_n \mid \vec{x}_1 \mid \vec{x}_2 \mid \cdots \mid \vec{x}_n) =$$

$$(I_n \mid B) = (I_n \mid A^{-1})$$

<u>Eksempel</u>

Bestem A^{-1} for $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \; -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -5 \; -2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{I_3} \qquad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATLAB:

```
>> inv(A)
```

? Og dersom vi ikkje klarar å få fram I_n til venstre?

$\rightarrow$ A er <u>ikkje invertibel</u>

Teorem: For ei $n \times n$-matrise A:

$$A \text{ invertibel} \iff A \sim I_n$$

Det siste er også ekvivalent med at A kan reduserast til ei trappeform med leiande tal i kvar søyle.

? I så fall: Kor mange løysingar har $A\vec{x} = \vec{b}$?

$\rightarrow (A|\vec{b}) \sim (I_n|\vec{x})$ — èi

Alternativt:

Veit A^{-1} finst: $\underbrace{A^{-1}A}_{I_n}\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$I_n\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$
$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ $\leftarrow$ Eintydig løysing

For 2×2 - matriser:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Når $ad-bc=0$: Ingen invers.

↑

determinanten