

TRFE 1000

Veke 6

① Minne om innlei.
Markus veke 8?

② Nye omgrep [begrep]

- Matriseprodukt
- Linearkombinasjon
- Lineær uavhengighet

Forklar



$A\vec{x}$

Dersom A har søylene $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^m$
og $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, er produktet $A\vec{x}$ lik

$$x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n.$$

Eksempel

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 25 \end{pmatrix}}}$$

-Vektor i $\mathbb{R}^3$

NB i denne sammenhengen lar vi vektorar vere søyler ikkje rekker.

Ein vektor i $\mathbb{R}^5$ er ei 5×1 -matrise.

(?) Kva er formatet til matrise over?
 $\rightarrow 3 \times 4$

Linearkombinasjon

Ein vektor $\vec{b}$ er ein lineær-kombinasjon av vektorane $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ dersom det finst tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ slik at $\vec{b} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$

Beispiel

Es $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination von

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

Kann wir schreiben $x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} ?$

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ -8x_1 + 2x_2 = -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ -8x_1 + 2x_2 = -14 \end{cases}$$

○ Totalmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -7 & 1 & 2 & \swarrow & \swarrow \\ 2 & 3 & 7 & -2 & \swarrow & \\ -8 & 2 & -14 & 1 & & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 7 & & & \\ 0 & -13 & -13 & & & \leftarrow -\frac{1}{13} \\ 0 & -12 & -12 & & & \leftarrow -\frac{1}{12} \sim \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 7 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \leftarrow -2 \\ 0 & 1 & 1 & & & \leftarrow \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 7 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \leftarrow -3 \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & & & \leftarrow \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

Spiele:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-7 \\ 4+3 \\ -16+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

Merke: Vi har tre ulike måter
å skrive den samme ting på:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 11 \end{cases}$$

Likningssystem

eller

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Vektorlikning

eller

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Matriselikning,

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Lineær uavhengighet

- Ser på likninger av typen

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

Null-vektor, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

- Homogen likning.

Eller, med $A = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots | \vec{v}_n)$:

$$A \vec{x} = \vec{0}$$

Denne likninga har alltid (minst ei) løsning. Hva for ei?

Spørsmål: Er dette den eindste løsning?

I så fall: $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ er lineært uavhengige.

Hvis ikke: Vektorene er lineært avhengige.

Eksempel

Angiv om disse sæt med vektorer er lineært afhængige:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 30 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ \pi \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 32 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 7.7 \\ 9 \end{pmatrix}$

a) Løsning:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$\vec{x} = \vec{0}$ eneste løsning; vektorerne er lineært uafhængige.

- kunne ha ressonert mere kompakt:

1) 0-søjle til højre kunne vi ha droppet

2) Alt på trappiform ser vi om vi har leiende tal for levar uleiend; vi kan avgjere det alt der.

Konklusjon

For $A = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots | \vec{v}_n)$.

Hvis vi redukerer A til trappiform og finn leiende tal i levar søyle, er søylene i A , $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ lineært uavhengige.

Hvis ikke: lineært avhengige.

Læreboka brukar dette som definisjonen.

5) 4 vektorar i $\mathbb{R}^3$

→ 3×4 -matrise.

Kan vi ha leiende tal i levar søyle?

→ Nei; vektorane er lineært avhengige.

② Kun for må et sett av vektorer nødvendigvis være lin. avh. dersom det inneheld $\vec{0}$?

Med $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ der, t.d., $\vec{v}_1 = \vec{0}$:

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = x_1 \vec{0} + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

$x_1 \neq 0$; ikke-triviell løsning.

③ Løsningsrom

Påstand:

Dersom likninga $A\vec{x} = \vec{b}$ er konsistent, kan den generelle løsningen alltid skrives som $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$ der $\vec{x}_p$ er ei spesiell ("partikulær") løsning og $\vec{x}_h$ er den generelle løsningen av den homogene likninga $A\vec{x} = \vec{0}$.

-Vi viser ikke dette generelt,
man sjekker det for dette
eksempellet

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ med}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & 8 \\ 10 & 40 & -24 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -54 \end{pmatrix}$$

○ Ser på $A\vec{x} = \vec{b}$

Totalmatrise:

$$(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 & -6 \\ 1 & -6 & 8 & 15 \\ 10 & 40 & -24 & -54 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{MATLAB}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.76 & 2.76 \\ 0 & 1 & -1.04 & -2.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2.76 - 1.76x_3$$

○ $x_2 = -2.04 + 1.04x_3$

x_3 er fri

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.76 - 1.76x_3 \\ -2.04 + 1.04x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.76 \\ -2.04 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1.76 \\ 1.04 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et spesiell løsning ($x_3 = 0$): $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 2.76 \\ -2.04 \\ 0 \end{pmatrix}$

Homogen likning: $A\vec{x} = \vec{0}$

Totalmatr.: $(A|\vec{0}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.76 \\ 0 & 1 & -1.04 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Samme
reduksjonsoperasjoner

Altså: $x_1 + 1.76x_3 = 0, \quad x_1 = -1.76x_3$

$x_2 - 1.04x_3 = 0, \quad x_2 = 1.04x_3$

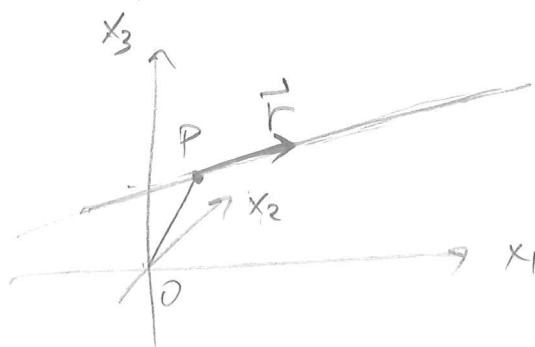
x_3 fri

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.76x_3 \\ 1.04x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1.76 \\ 1.04 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_h}$$

Altså: $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$ er den generelle
løsning.

[?] Om vi tenker på vektorer som
punkter, hva er mengde av alle
løsninger for ndio. - geometrisk?

→ ei linje gjennom $P = (2.76, -2.04, 0)$,
parallel med $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1.76 \\ 1.04 \\ 1 \end{pmatrix}$



④ Matrimultiplikasjon

- To reknemåter - definisjonen og
en til.

Eksempel

Reken ut $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

②) Kva rom skal svaret ligge i?
 $\hookrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\dots = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Alternativt: Kryss og tvers:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{3 \quad 0 \quad 7} & 1 \\ \underbrace{4 \quad -1 \quad 0} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overbrace{3} \\ \overbrace{-2} \\ \overbrace{1} \\ \overbrace{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - 0 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix}}}$$

Matrise-matrise-produkt

Dersom B har søylene $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$,
 $B = (\vec{b}_1 | \dots | \vec{b}_n)$, er matriseproduktet AB
definert som

$$AB = (A\vec{b}_1 | A\vec{b}_2 | \dots | A\vec{b}_n)$$

Eksempel

Reken ut AB når

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 2×4

$\swarrow 4 \times 3$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \vec{b}_3$

$$A\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+0+49+1 \\ 12-0+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0+4 \\ 0-2+0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0+21+4 \\ 4-2+0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$- AB = (A\vec{b}_1 | A\vec{b}_2 | A\vec{b}_3) = \begin{pmatrix} 59 & 4 & 28 \\ 14 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

- Tungvint! :

Betre: Brukar "kryss og tvers-regelen"
direkte:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9+4+1 & 4 & 3+21+4 \\ 12+2 & -2+8 & 4-2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & 4 & 28 \\ 14 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ 2 \times 3 \end{matrix}$$

(?) Kva blir BA? - Det same?

Nei

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

↑

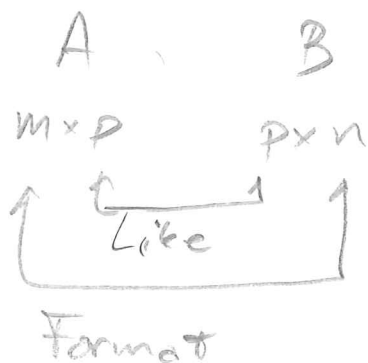
↑

2 rekker

tre søyler

→ Går ikkje.

For at produktet AB skal være defineret, må A ha like mange søyler som B har rader. Produktet har like mange rader som A og like mange søyler som B .



Eksempel

Definisjonen er slik at vi kan droppe parenteser:

$$A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x} = AB\vec{x}.$$

Støttest dette med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 \\ 7x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$A(B\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 \\ 7x_1 + x_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (4x_1 + 2x_2) + 2 \cdot 3x_2 + 3(7x_1 + x_2) \\ -(4x_1 + 2x_2) + 0 + 7x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25x_1 + 11x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0+21 & 2+6+3 \\ -4+0+7 & -2+0+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 25 & 11 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)\vec{x} = \begin{pmatrix} 25 & 11 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25x_1 + 11x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix} = A(B\vec{x})$$
