TRFE 1000

Veke 5

① Beskjeder / info?

- Minne om innlevering

Om talestmengde i 9.1

I oppgåvene: Udefinerte omgrep. Problem [?]

Veke 8: Hjelp av Markus [?]

② Det vi held på med:

- Løyse lineære likningssystem ved hjelp av addisjonsmetoden

- Kompakt skrivemåte: Rekkeoperasjonar på totalmatrise (lærebok: „den utvide matrisa").

- Ryddar opp i omgrepa [begrepene] i samband med denne metoden.

Eksempel (s. 401 i læreboka)

Løys dette likningssystemet:

$$
\begin{aligned}
x_3 - 2x_4 &= 0\\
3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 18x_4 &= -9\\
-2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 &= 7
\end{aligned}
$$

Totalmatrise:

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 3 & 6 & 9 & -18 & -9\\ -2 & -4 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}}_{\text{koeffisientmatr.}} \sim
$$

- Vil fjerne x_1 i likn. 2 og 3

$$
\begin{pmatrix} * & \cdots\\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}
$$

bli 1?

$$
\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & -18 & -9\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ -2 & -4 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \leftarrow \tfrac{1}{3} \sim
\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ -2 & -4 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \\ \\ \end{array} \sim
$$

bli 0

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 7 & -13 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -7 \\ \\ \end{array} \sim
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{cc} & \\ & \\ 2 & 6 \end{array} \sim
$$

flaks! bli 0

Trapp

„Trappeform"

leiande tal

Neste jobb:

Fjerne x_4 frå likn. 2 og 1, og x_3 frå likn. 1:

Redusert trappeform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ -3 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Likningssystem:

$$x_1 + 2x_2 = -3$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = 1$$

– Blir ikkje enklare

(?) Kva veit vi om x_2?

→ Ingenting! x_2 er fri.

Løysing:

$x_1 = -3 - 2x_2$

x_2 er fri

$x_3 = 2$

$x_4 = 1$

– Uendeleg mange løysingar – ei for kvar mogeleg verdi for x_2.

– Ikkje så rart, vi hadde 4 ukjende

og berre 3 likningar.

Metode: Rekkereduksjon / Gauss-eliminering

Trappeform: 1) Det første talet ulikt 0 i kvar rekke står til høgre for det i rekka over
2) Evt. reine null-rekker skal stå nederst.

Leiande tal: For ei matrise på trappeform: Første tal $\neq 0$ i kvar rekke. (treng ikkje vere 1)

Redusert trappeform:

1) Trappeform
2) Alle leiande tal er 1.
3) Alle tal over leiande tal er 0.

Eksempel: Kva for nokre av desse matrisene er på trappeform? Enn redusert trappeform?

→ Eige ark, ligg på Fronter.

③ Løysingar

Eksempel

Løys desse likningssystema

a) $2x_1 - x_2 = 1$

$3x_1 + 4x_2 = 2$

b) $2x_1 - x_2 = 1$

$-4x_1 + 2x_2 = -2$

c) $2x_1 - x_1 = 1$

$-4x_1 + 2x_2 = 2$

---

a) Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \frac{1}{2} \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \frac{2}{11} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{11} \\ 0 & 1 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \qquad x_1 = \frac{6}{11}, \quad x_2 = \frac{1}{11}$$

b) Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \hookleftarrow \end{matrix} \leftarrow \tfrac{1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ← Ingen informasjon

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x_2$

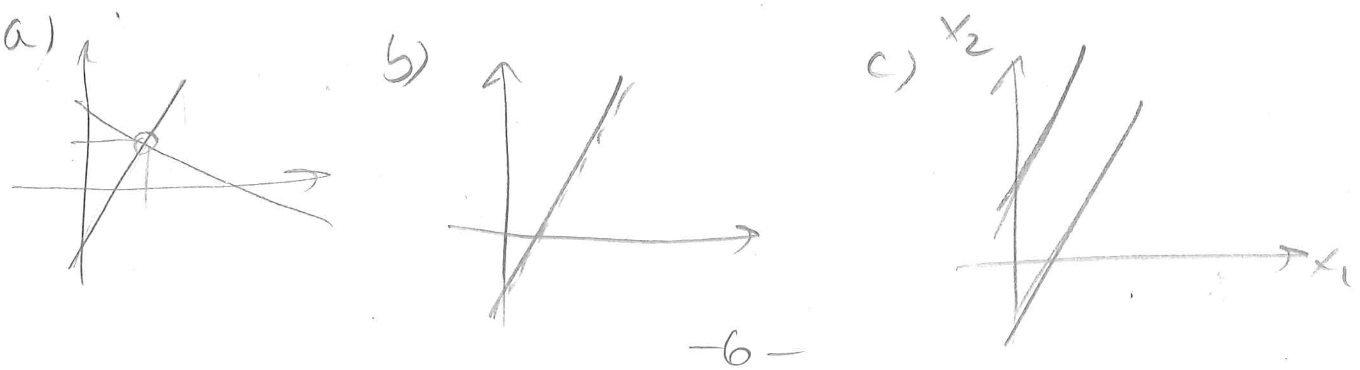
x_2 er fri //

c) Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ ← Inge løysing „$0x_1 + 0x_2 = 4$"

Likningssystemet er inkonsistent

Generelt: Dersom totalmatrisa har eit leiande tal lengst til høgre (på trappeform), er likningssystemet inkonsistent; det har ikkje noko løysing.



Geometri for 3 likningar med 3 ukjende: Skjæring mellom plan.

→ Illustrasjonar

(4) Eksempel på korleis lineære likningar kan dukke opp

---

1) Balansering av kjemiske likningar

Forbrenning av propan (s. 426)

$$C_3H_8 + O_2 \to H_2O + CO_2$$

- Ubalansert
- Må vere like mange av kvart atom på kvar side.

$$x_1 C_3H_8 + x_2 O_2 \to x_3 H_2O + x_4 CO_2$$

Karbon: $3x_1 = x_4 \iff 3x_1 \qquad - x_4 = 0$

Hydrogen: $8x_1 = 2x_3 \iff 8x_1 \quad -2x_3 \quad = 0$

Oksygen: $2x_2 = x_3 + 2x_4 \qquad x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$

Homogent.

[?] Openberr løysing?

→ Triviell løysing: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \frac{1}{3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 8 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} -8 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix} \leftarrow -\frac{1}{2} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} 1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \frac{1}{2} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = \frac{x_4}{3}$

$x_2 = \frac{5}{3} x_4$

$x_3 = \frac{4}{3} x_4$

x_1, x_2, x_3, x_4 – må vere heiltal > 0 (kvifor [?])

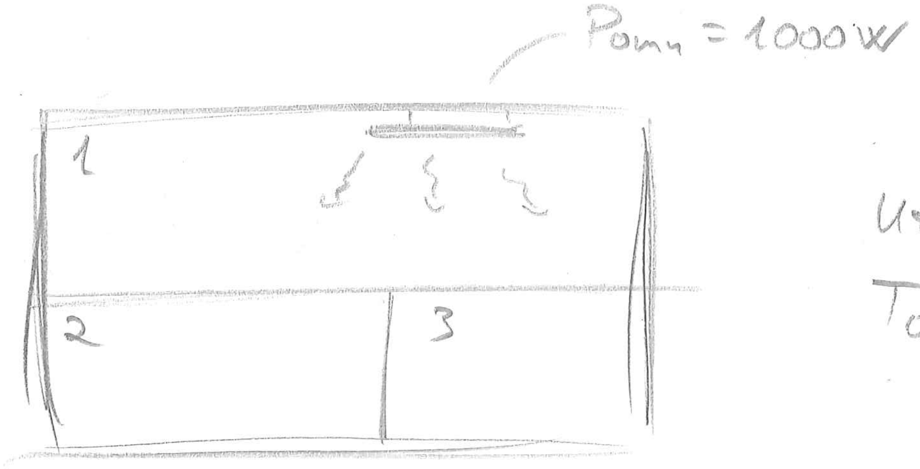
– Vel $x_4 = 3$ slik at $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ og $x_3 = 4$:

$$C_3H_8 + 5\,O_2 \rightarrow 4\,H_2O + 3\,CO_2$$

(C: $3 \rightarrow 3$, H: $8 \rightarrow 2 \cdot 4$, O: $10 \rightarrow 4 + 2 \cdot 3$)

Eksempel

Dårleg isolert hus, 1. etg:



Ute:

$T_0 = -5°C$

Effekt av varmegang mellom rom proporsjonal med temperaturdifferanse.
Mellom rom 1 og 2, til dømes:

$P_{12} = k_{12}(T_1 - T_2)$, $k_{12} = 50$ (W/°C)

Tabell over koeffisientar

	Ute	1	2	3
Ute	×	20	10	10
1	20	×	50	45
2	10	50	×	37
3	10	45	37	×

Symmetrisk

Når temperaturane har stabilisert seg, kva blir temperaturen i kvart rom?

Rom 1:

$$k_{12}(T_1 - T_2) + k_{13}(T_1 - T_2) + k_{10}(T_1 - T_0) = P_{omn}$$

$$50(T_1 - T_2) + 45(T_1 - T_3) + 20(T_1 - (-5)) = 1000$$

$$115 T_1 - 50 T_2 - 45 T_3 = 900$$

Rom 2

$$k_{12}(T_1 - T_2) - k_{23}(T_2 - T_3) - k_{02}(T_2 - T_0) = 0$$

$$50(T_1 - T_2) - 37(T_2 - T_3) - 10(T_2 - (-5)) = 0$$

$$50 T_1 - 97 T_2 + 37 T_3 = 50$$

Rom 3

$$k_{13}(T_1 - T_3) + k_{23}(T_2 - T_3) - k_{03}(T_3 - T_0) = 0$$

$$45(T_1 - T_3) + 37(T_2 - T_3) - 10(T_3 - (-5)) = 0$$

$$45 T_1 + 37 T_2 - 92 T_3 = 50$$

Alt i alt:

$$115 T_1 - 50 T_2 - 45 T_3 = 900 \qquad (P_{omn} - 100)$$

$$50 T_1 - 97 T_2 + 37 T_3 = 50$$

$$45 T_1 + 37 T_2 - 92 T_3 = 50$$

Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 115 & -50 & -45 & 900 \\ 50 & -97 & 37 & 50 \\ 45 & 37 & -92 & 50 \end{pmatrix}$$

↓ MATLAB (rref-funksjonen)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 22.4 \\ 0 & 1 & 0 & 17.7 \\ 0 & 0 & 1 & 17.5 \end{pmatrix}$$

← Kva veg går varmen mellom rom 2 og 3?

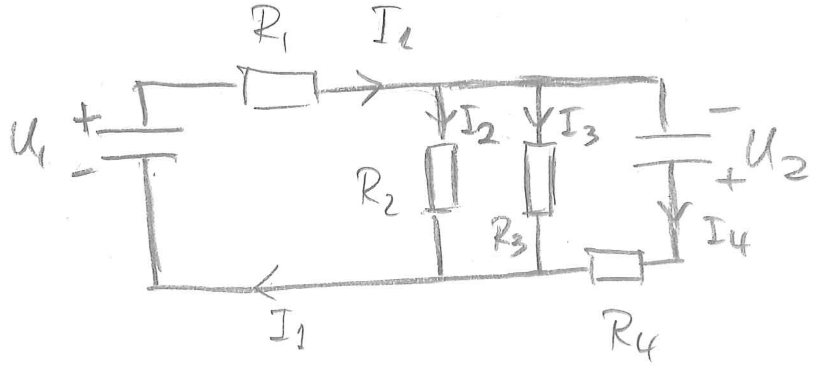
$T_1 = 22.4°C$, $T_2 = 17.7°C$, $T_3 = 17.5°C$

Meir interessant: Om vi ønsker bestemte temperaturar, kva må P_{omn} vere? Treng vi fleire omnar?

- MATLAB-demo

Eksempel

Bruk Kirchhoffs lover og Ohms lov til å bestemme straumane i denne kretsen:



$U_1 = 10\,V$

$U_2 = 5.0\,V$

$R_1 = 2.0\,\Omega$

$R_2 = 3.2\,\Omega$

$R_3 = 2.5\,\Omega$

$R_4 = 7.0\,\Omega$

Kirchhoffs 1. lov: $I_1 = I_2 + I_3 + I_4$

— " — 2. lov: $U_1 = R_1 I_1 + R_2 I_2$

$U_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$

$U_1 + U_2 = R_1 I_1 + R_4 I_4$

Likningssystem

$$
\begin{aligned}
I_1 - I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \\
R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U_1 \\
R_1 I_1 + R_3 I_3 &= U_1 \\
R_1 I_1 + R_4 I_4 &= U_1 + U_2
\end{aligned}
$$

Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2.0 & 3.2 & 0 & 0 & 10 \\ 2.0 & 0 & 2.5 & 0 & 10 \\ 2.0 & 0 & 0 & 7.0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & U_1 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 & U_1 \\ R_1 & 0 & 0 & R_4 & U_1+U_2 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ MATLAB

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3.42 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.99 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1.26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.17 \end{pmatrix}$$

$I_1 = 3.42A$, $I_2 = 0.99A$, $I_3 = 1.26A$, $I_4 = 1.17A$

[?] Kva hvis nokon av desse hadde blitt negative?

→ straumen går motsett av det vi teikna.