

TRFE 1000

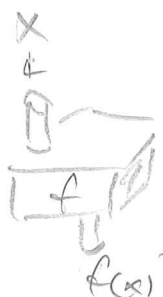
Veke 4

① Info?

- Beklagar forurming når det gjeld om Årund har gjennomgått det. Han har det; kan vere verd å repetere meir.
- Høpar å ha punkten 1 ute i løpet av neste veke.

② Mer om funksjonar

Kva er ein funksjon



Poeng: Tallet $f(x)$ skal vere fullt og heilt bestemt av x .

Der som eg ein gong puttar
 $x=5$ på maskina og får ut $f(x)=7$,
og så får ut $f(x)=-2$ neste gong
eg puttar på $x=5$, er ikkje f
ein funksjon. Den er ikkje
eindydig.

Funksjoner kan vere mykje rart

Eksempel: Porto

[?] Andre ting

Nokre omgrep [begrep]:

Definisjonsmengde:

Mengde av dei tala du kan
putte på funksjonsmaskina

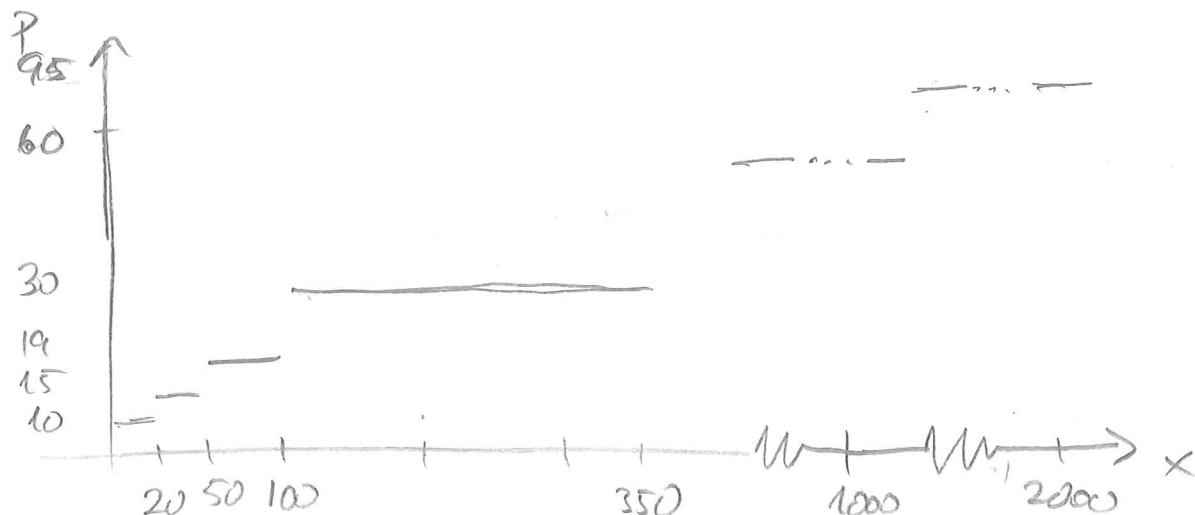
Verdimengde:

Mengde av alle tal du kan
få ut av maskina.

Med $p(x)$ - porto i ler for
brev med massen x gram.

$$D_p = \langle 0, 2000 \rangle$$

$$V_p = \{10, 15, 19, 30, 60, 95\}$$



I matematik - Sphær:

Ofte elementære funktioner:

- Polynom $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
- Potensfunk. $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$
- Trigonometriske $\cos x, \sin x$
- Eksponential e^x

+ Alle endelige aritmetiske kombinationer og
sammenbygninger af disse + inversfunk.

Eksempel

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad (r = 1/2)$$

$$p_n(x) = (x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$$

$$a_0 = 3, a_1 = -2, a_2 = 2, n = 2 \quad \leftarrow \text{grad}$$

$$g(x) = \sin(3x-1)$$

trig. poly. (n=1)

$$h(x) = e^{\cos x}, \quad \frac{f(x)}{g(x)} + h(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin(3x-1)} + e^{\cos x}$$

NB: Dette er bare en vilkårlig
klasse av funksjoner!

Tanke-eksperiment:

Om vi starter med et
koordinatsystem og tegner en
kurve — hva kurve som helst —
vil dette være grafen til en
funksjon — så lenge ... [?]
(→ entydig)



Nemnde "inverse funksjoner"

-Har sett et par eksempel d/t

② Kva for uolere?

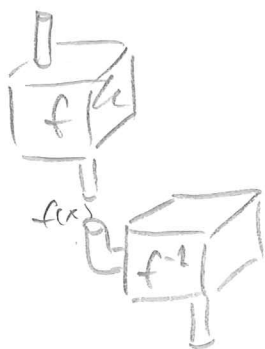
→ $\ln x$ for e^x

$\sqrt{x}$ for x^2 ($x \geq 0$)

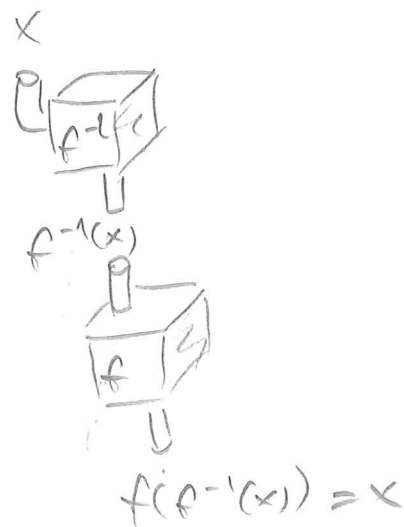
$\arcsin x$ for $\sin x$ ($x \in [-1, 1]$)

③ Inversfunksjoner

f^{-1} : Gjør det motsatte av f



og motsatt



Samansette funksjoner:

Med $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sin(3x)$:

$$f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sin(3x))^2 = \sin^2(3x)$$

$$g(f(x)) = \sin(3 \cdot f(x)) = \sin(3x^2)$$

Lærebokke: " $f \circ g(x)$ og $g \circ f(x)$ ".

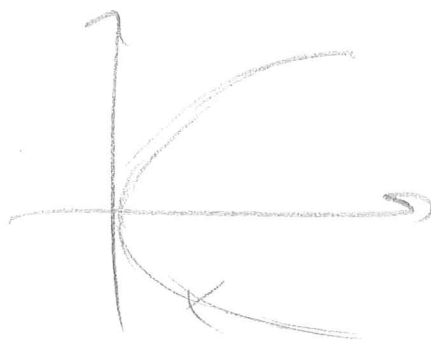
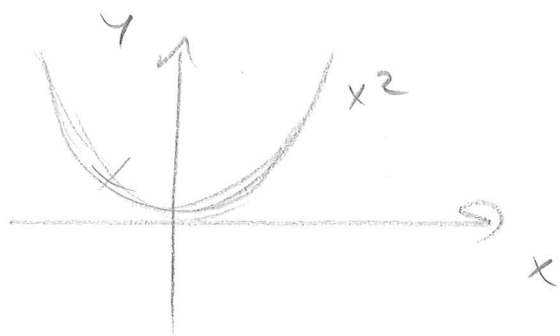
Påstand at $\sqrt{x}$ er inversfunksjonen til x^2 . Men det er ikke helt sant.

Med $y = f(x)$: Bestemmer $f^{-1}(y)$ ved å løse likninga for x :

$$y = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{y}$$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$? Nei, ikke entydig



Med $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$

grafisk: "flipper", bytter om på rollene til x og y

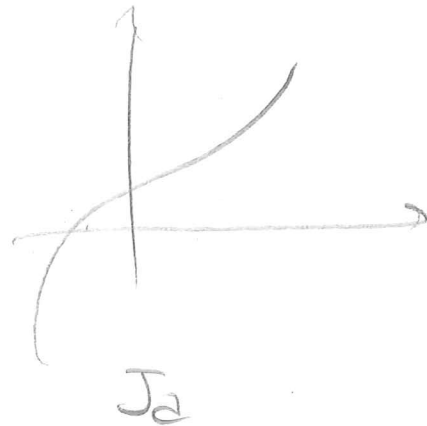
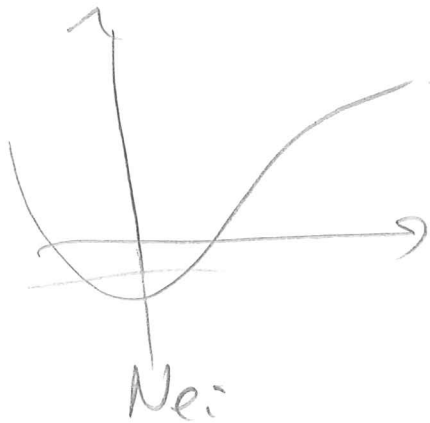
For at $f^{-1}(x)$ skal være veldefinert:

Kan leve at $D_f = [0, \infty) \Rightarrow f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$

Krav til funkt. $f(x)$: Èin $x \rightarrow$ Èin y

Krav for at $f^{-1}(x)$ skal findes:

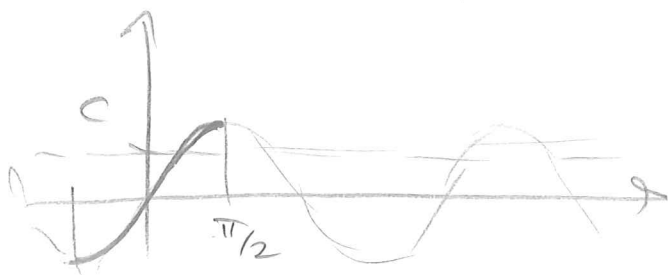
Èin y , èin x



- Egenskaben blir kalle "ein-entydig"
eller "injektiv".

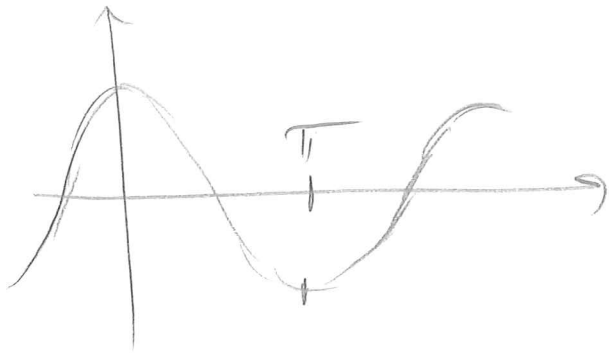
Men $\sin x$ har jo inv.-funkt.

$\arcsin x$ - Samtidig som ligninger
av typen $\sin x = c$ har uendelig
mange løsninger.



Når vi velner med $\arcsin y$: Krever
at $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

For arcsin y : $x \in [0, \pi]$



Eksempel

Kva er den største m glige definisjonsmengde (den nat rlige def.-mengde) til

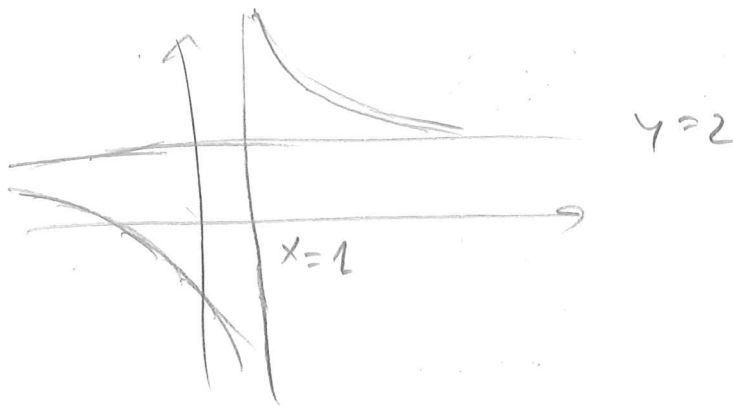
$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

Vis at f er  n- ntydig og finn f^{-1} .



f : Rasjon l funksjon (polynom delt p  polynom).

Asymptoter: $y=2$ og $x=1$



$$y = f(x)$$

$$y = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$(x-1)y = 2x+3$$

$$yx - 2x = 3 + y$$

$$x(y-2) = 3+y$$

$$x = \frac{y+3}{y-2}$$

— eindeutig

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-2}$$

Nommes x die Variable:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

4

Plotting i MATLAB

- Lagar vektorer med x- og y-verdier.

```
>> x = [-1 1 3];
```

```
>> y = [2 -1 7];
```

```
>> plot(x, y)
```

Demonstrerer: Rette linjer mellem punkterne $(-1, 2)$, $(1, -1)$ og $(3, 7)$

Ofte:

```
>> x = -2: 0.02: 4;
```

```
>> y = <funksionsudtrykke>
```

Eksempel: $\sin x^2$: $y = \sin(x.^2);$

- Variere steglængde (0.02 over)

Eksempel: Plotte $\sin x$ og $\arcsin x$

- På to måter:

$\text{plot}(y, x)$ og $\text{plot}(x, z)$ med

$z = \arcsin(x);$

Viktig stikkord:

hold on/off

(Evt. også "axis" og "grid on/off")

⑤ Lineære likningssystem

- Skal jobbe med likninger av
typen

$$x + 2y = 4 \quad (\text{I})$$

$$3x - y = 1 \quad (\text{II})$$

- Lineære; berre summer, tal
(skalarer) av x og y - ikke
 $x \cdot y$, $\sqrt{x}$, $\sin y$ og slikt. :)

Grafisk: Skjæringspunkt mellom to

linjer: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

$$y = 3x - 1$$

→ Plotte i MATLAB

10 metoder

1) Innsettingsmetoden:

$$\text{II: } y = 3x - 1$$

$$\text{I: } x + 2 \cdot (3x - 1) = 4$$

$$7x - 2 = 4$$

$$x = \frac{4+2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$y = 3 \cdot \frac{6}{7} - 1 = \frac{11}{7}$$

2) Addisjonsmetoden

$$-3 \cdot \text{I: } -3x - 6y = -12$$

$$+ \text{II: } 3x - y = 1$$

$$-7y = -11$$

$$y = \frac{11}{7}$$

$$\text{I: } x = 4 - 2y = 4 - 2 \cdot \frac{11}{7} = \frac{6}{7}$$

Her: Skal berre bruke addisjons-
metoden — veldig systematisk:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y = 4 & & -3 \\ 3x - y = 1 & & \leftarrow \end{array}$$

$$x + 2y = 4$$

$$0x - 7y = -11 \quad \leftarrow -\frac{1}{7}$$

$$x + 2y = 4$$

$$0x + 1y = \frac{11}{7} \quad \leftarrow -2$$

$$x + 0y = \frac{6}{7}$$

$$0x + 1y = \frac{11}{7}$$

Mer kompakt notation / skrivemåte

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & \end{array} \right) \leftarrow \text{Trappesform} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & \\ 0 & -7 & -11 & \end{array} \right) \leftarrow -\frac{1}{7} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} & -2 \end{array} \right) \leftarrow \text{Matriser} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{6}{7} & \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} & \end{array} \right)$$

- utfører
relaterede operasjoner

Redusert trappesform

Eksempel

Løys likningssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 7 \\ -4x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$$

Totalmatrise

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 7 \\ -4 & 5 & -3 \end{array} \right)$$

ligning 1
: ligning 2

levert.

$\uparrow$ $\uparrow$
 x_1 x_2

Høgreside

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 7 \\ 0 & -3 & 11 \end{array} \right) \leftarrow -\frac{1}{3} \quad -\text{vil ha 1 for } x_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{array} \right) \leftarrow 4 \quad \text{ligning 1
: ligning 2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -\frac{23}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{array} \right) \leftarrow \frac{1}{2} \quad -\text{vil ha 1 for } x_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{23}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{array} \right)$$

$$\text{Alt\dots: } \begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 &= -\frac{23}{6} \\ 0x_1 + 1x_2 &= -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

$$\underline{x_1 = -\frac{23}{6}, \quad x_2 = -\frac{11}{3}}$$

② I rummet - korleis er geometrien der?

Korleis kan vi sjå for oss løysinga av tre lineære likningar i tre uløpende?

- Skiløring mellom tre plan:

Èitt punkt.

Èller?

→ Vise plott.

Eksempel

Løs disse to lineeringssysteme:

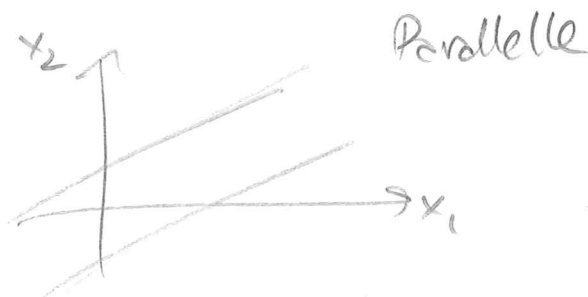
$$a) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Nederste ræk: " $0x_1 + 0x_2 = 13$ "

— Finst ingen slik x_1 og x_2 ;
ingen løsning.



$$b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Løsning}$$

$x_1 = 2 + x_2 \leftarrow$ Fri parameter

Ingen info.

