TRFE1000 PJ653

Veke 3

(1) MATLAB-starten: Bra

Repetisjonsoppgåvene: Ikkje så bra.

Når vi går vidare med lineær algebra („matriser og sånn") om litt bør mange av dykk prioritere ting som algebra, eksp.- log.- og trig.-funksjonar.

Vi skal også bruke denne veka på repetisjon.

Tentative datoar for innleveringar sett opp. Dei kan justerast; sei ifrå!

(2) Går gjennom visse oppgåver frå settet frå førre veke.

Korting: Berre mellom <u>faktorar</u>

$$\frac{(x-2)\cancel{(x+3)}}{2(x+3)^{\cancel{2}}} = \frac{x-2}{2(x+3)} \quad \text{Ja}$$

$$\text{„}\frac{\cancel{x}}{x+3} = \frac{1}{3}\text{"} \quad \text{NEI}$$

ln-funksjonen: Ikkje lineær!

$$\ln x = 2 \overset{\boxed{?}}{\Rightarrow} x = e^2$$

„Kva må eg opphøge e i for å få x?"

Tilsvarande: $\sqrt{9} = 3$

„Kva må eg kvadrere for å få 9?"

x^2 og $\sqrt{x}$: Inversfunksjonar $(x \geq 0)$

e^x og $\ln x$: —— " ——

Merk: $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} = \underline{\underline{x}}$

og $e^{\ln x} = \ln e^x = \underline{\underline{x}}$

Ulikskaper

NB! Ulike likningar!

$x - 7 > 2x + 3$

$x - 2 > 3 + 7$

$-x > 10$

$(-1)\cdot(-x) \underline{<} -10$

NB!

$\underline{x \leq 10}$ $\quad (\Leftrightarrow \; x \in \langle -\infty, 10])$

– Verre med meir kompliserte uttrykk:

$x^2 - 6x \leq -5$

$x^2 - 6x + 5 \leq 0$

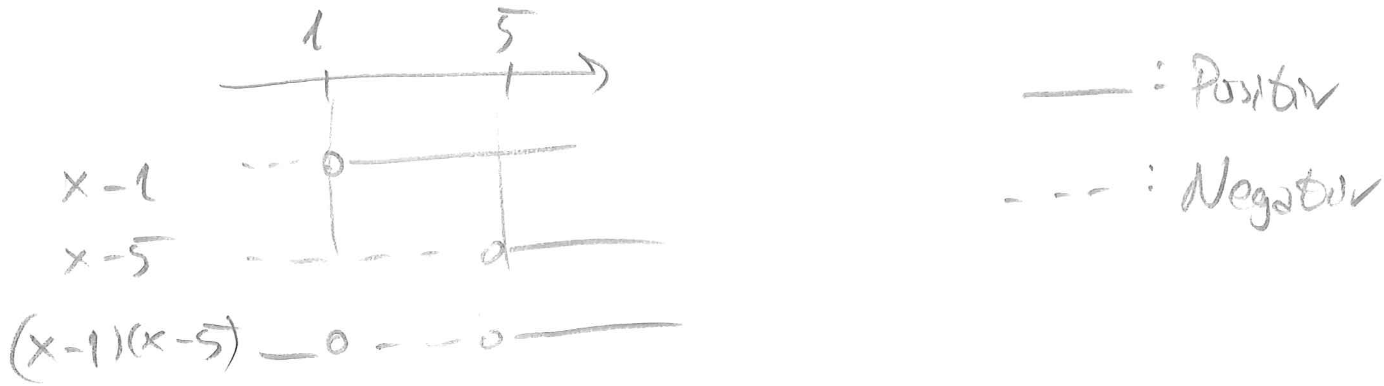
– Vil avgjere når 2.-grads-polynomet er negativt.

Fann at $x^2 - 6x + 5 = 0$ når $x = 1$ <u>eller</u> $x = 5$

Faktorisering: $x^2 - 6x + 5 = 1\cdot(x-1)(x-5)$

$\boxed{?}$ Kva bruker vi det til?

→ Forteiknskjema



Ser: $(x-1)(x-5) \le 0$ når $x \in [1,5]$

$(\Leftrightarrow \ 1 \le x \le 5)$

Bakteriekulturen:

- 5000 ved $t=0$
- Dobling kvar 3. time

Etter 0 h: 5000

3 h: $5000 \cdot 2$

6 h: $5000 \cdot 2 \cdot 2 = 5000 \cdot 2^2$

9 h: $5000 \cdot 2^3$

Etc.

? Etter t-timar?

Dobling $\frac{t}{3}$ gonger;

$B(t) = 5000 \cdot 2^{t/3}$

Generell eksponentialfunksjon:

$$f(x) = C\, e^{kx}$$

$\boxed{?}$ Kvifor e?

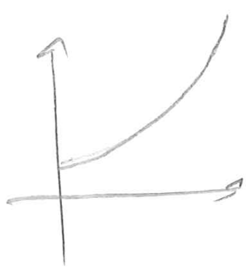
→ Lett å derivere

$\boxed{?}$ Er $B(t)$ på denne forma?

→ Ja: $2 = e^{\ln 2}$

$$B(t) = 5000 \cdot \left(e^{\ln 2}\right)^{t/3} =$$

$$\underbrace{5000}_{C}\, e^{\underbrace{\frac{\ln 2}{3}}_{k} \cdot t}$$

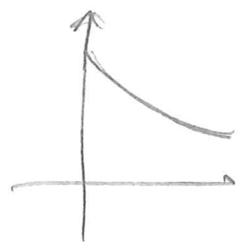


$\boxed{?}$ Vil f auke uansett?

Nei, berre når $k > 0$

Bilverdi: $V(t) = 350 \cdot 0.9^{t} = 350 \cdot e^{\ln 0.9 \cdot t}$

$\ln 0.9 < 0$



Bakteriane:

$$5000 \cdot 2^{t/3} = 15\,000$$

$$2^{t/3} = \frac{15\,000}{5000} = 3$$

$$\frac{t}{3} \ln 2 = \ln 3 \ , \quad t = 3\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 4.75$$

Trigonometriske funksjonar

Radianar:

$v = \frac{b}{r}$ — $\boxed{?}$ Eining?

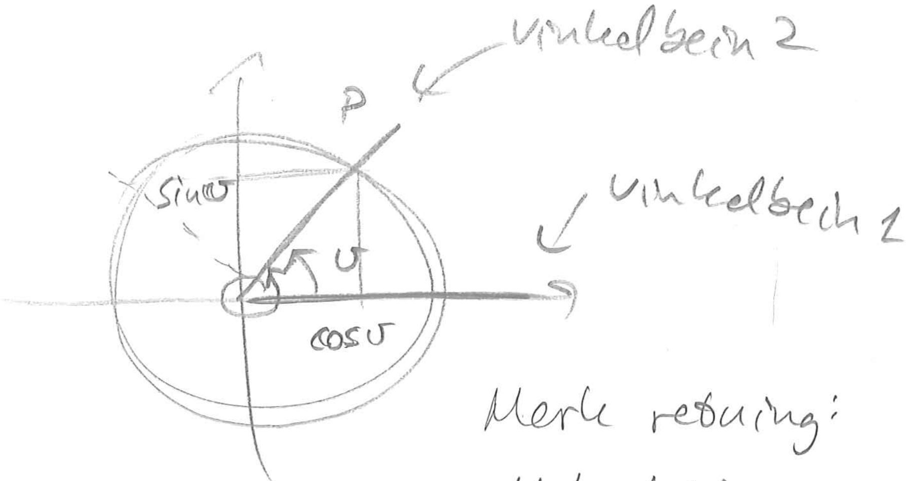
- Inga

Heile sirkelen: $O = b = 2\pi r$

$$v = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi = 360°$$

Vinkel i grader: $v \, \frac{360°}{2\pi} = v \cdot \frac{180°}{\pi}$

Einings-sirkelen



Merk retning:
- Mot klokka

$v > 2\pi$? Javisst!

jmf. 540 (eller 3π) på snøbrett

Difor: Likningar av typen $\sin x = a$ ($a \in [-1, 1]$) har mange løysingar
- generelt 2 for kvart omløp

Generell trigonometrisk funksjon:

$$f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Eller

$$f(x) = a\sin(k(x-\varphi))$$

Veit: $\sin x = \sin(x+2\pi)$

2π: <u>Perioden</u> til $\sin x$

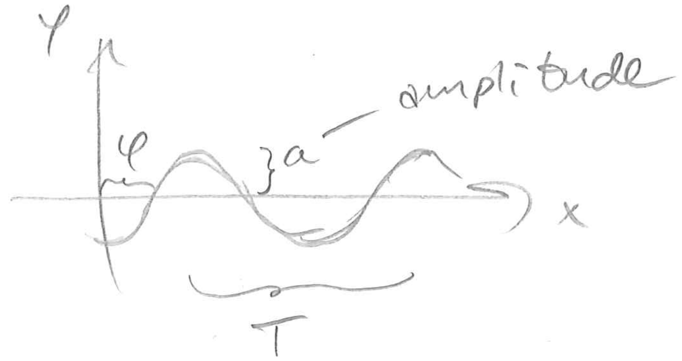
Perioden til f: T

$$\sin(k(x-\varphi)) = \sin(k(x+T-\varphi))$$

$$= \sin(k(x-\varphi)+kT)$$

$kT = 2\pi$, $k = \frac{2\pi}{T}$

Plott



Frå oppgåvesettet: $a = 325$, $T = \frac{1}{50}$

$V(t) = 325\sin(k(x-\varphi))$, $k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{50}} = 100\pi$

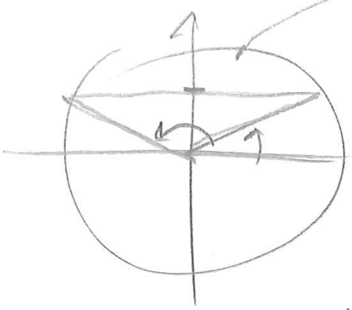
$V(0) = 0$ – null forskyvning; $\varphi = 0$

$V(t) = 325 \sin(100\pi \cdot t)$

$\boxed{?}$ Når er $V(t) = 200$ (volt) ?

$325 \sin(100\pi t) = 200$

$\sin(100\pi t) = \frac{200}{325} \approx 0.6154$ $\approx 38^\circ$



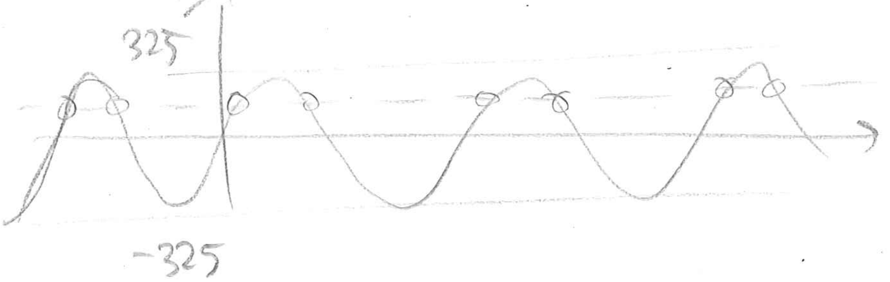
$\arcsin 0.6154 \approx 0.6629$ (rad)

To løysingar i 1. omløp:

$100\pi t = 0.663$. eller

$100\pi t = \pi - 0.663 = 2.479$

Men: Vi kan gå så mange omløp vi vil – i begge retningar



$100\pi t = 0.615 + n \cdot 2\pi$ eller

$100\pi t = 2.479 + n \cdot 2\pi$ $\Leftrightarrow$

$t = 7.89 \cdot 10^{-3} + n \cdot \frac{1}{50}$ ← perioden eller

$t = 2.11 \cdot 10^{-3} + n \cdot \frac{1}{50}$

Dersom f ikkje svingar omkring x-aksen, men y=d-linja:

$f(x) = a\sin(k(x-\varphi)) + d$

Eksempel 1

Vi tenkjer oss at det blir flo og fjøre to gonger på eit døgn. På flo er vasstanden 7.0 m og på fjøre er ho 6.2 m. Ved midnatt er vasstanden 6.3 m.

Lag ein modell for djupna $f(t)$ der tida t er talet på timar etter midnatt.

---

(1)

$f(t) = a\sin(k(t-\varphi)) + d$

Midt: $\frac{7.0+6.2}{2} = 6.6 = d$ (Gjennomsnitt)

Amplitude: $2a = 7.0 - 6.2$ (Topp minus botn)

$a = 0.4$

Periode: $\frac{24}{2} = 12 = T$, $k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

$f(t) = 0.4 \sin\left(\frac{\pi}{6}(0-\varphi)\right) + 6.6$

Veit: $f(0) = 6.3$

$$0.4 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\varphi\right) + 6.6 = 6.3$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{6}\varphi\right) = \frac{6.3-6.6}{0.4} = -\frac{3}{4} \qquad \left(\sin(-x) = -\sin x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\varphi\right) = \frac{3}{4}$$

- Mange løysingar.
- Vel den minste positive

$$\frac{\pi}{6}\varphi = \arcsin\frac{3}{4} \approx 0.848$$

$$\varphi \approx \frac{6 \cdot 0.848}{\pi} \approx 1.62$$

$$f(t) = 0.4 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-1.62)\right) + 6.6$$

→ Plotte i MATLAB.

Eksempel 2

Løys desse likningane

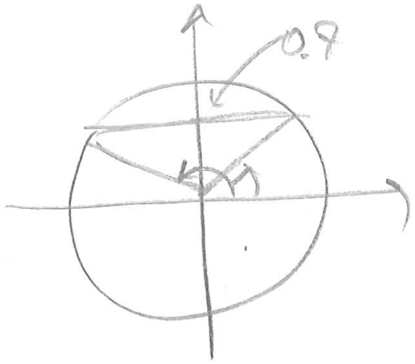
a) $\sin x = 0.7, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

b) $\cos 2x = \frac{1}{2}, \quad (x \in \mathbb{R})$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/2} = 0.043$

①

a) $\sin x = 0.7$

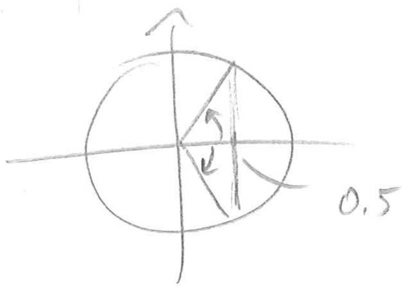


$\arcsin 0.7 = 0.7754$

(kalkulator)

$\underline{x = 0.7754}$ eller $x = \pi - 0.7754 = \underline{2.366}$

b) $\cos 2x = \frac{1}{2}$



Kjent:

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ $(=60°)$

$2x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ eller $2x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ eller $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$

$\left(x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$ der $n \in \mathbb{Z}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/2} = 0.043$

$\ln \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2} = \ln 0.043$

$\frac{t}{2} \ln \frac{1}{2} = \ln 0.043$ kalkulator

$t = 2 \frac{\ln 0.043}{\ln \frac{1}{2}} = \underline{9.079}$

(3) Om matriser (og komplekse tal)

(Rekke-) Vektor (på koordinat-form):

$\vec{x} = [7, -8, 15, -3, 0.73]$

– Ei remse med tal.

Matrise: Ei rute med tal:

$$M = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 15 & -3 & 0.83 \\ 4 & 9 & 12 & -7 & 18 \\ 39 & 9.9 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ser: $\vec{x}$ er første rekke i M

M har 3 rekker og 5 søyler;

M er ei 3×5-matrise

Vi kan indeksere elementa i $\vec{x}$ med (naturlege) tal frå og med 1 til og med 5

MATLAB:

```
>> x = [7 -8 15 -3 .73];
>> x(1)

   ans = 7
```

```
>> x(4) ↵
      ans = -3
```

etc.

Ei matrise har to indeksar.

```
>> M=[7  -8  15  -3  73 ↵
 4   9   12   -7   18 ↵
 39  9.9  -2   2   0];

>> M(2,4) ↵
      ans = -7
```

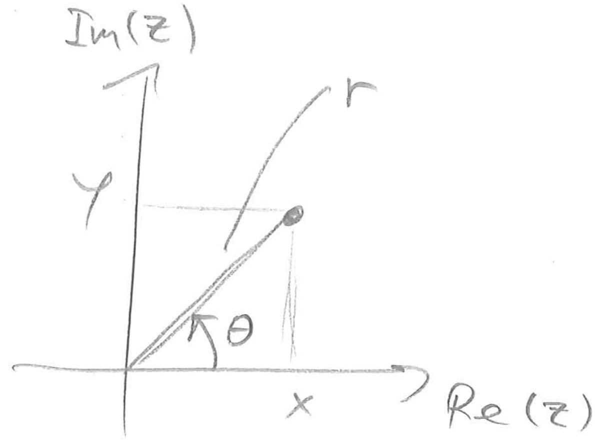
← Elementet i rekke 2, søyle 4 i matrisa M.

Komplekse tal

Om vi aksepterar at vi kan ta kvadratrota av negative tal (kan vi [?]), får vi komplekse tal: $z = x + iy$ der x og y er reelle tal og $i = \sqrt{-1}$

Alternativ skrivemåte:

$z = r e^{i\theta}$



Pytagoras:

$x^2 + y^2 = r^2$

Argument:

$\frac{y}{x} = \tan\theta$

NB! Dette skal vi først jobbe med i sommar. Men du kan godt gjere oppg. 3 i numerikk-kompendiet alt no likevel.

(4) Påminning:

Viktig å ta ansvar for eiga repetisjon. – Ta gjerne kontakt for individuelle tips!