

Innlevering i matematikk 1000
Oppgåvesett 6
Innleveringsfrist: 23. mars klokka 14:00
Talet på oppgåver: 4

Hugs å skrive tydeleg namn, studentnummer og klasse.
Alle deloppgaver har lik vekt. Ein skal grunngi alle svar.

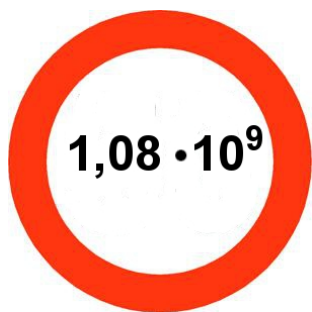
Oppgåve 1

I følge den spesielle relativitetsteorien til Einstein gjeld denne relasjonen mellom krafta F som verkar på ein lekam og farten v til lekamen:

$$F = m \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right),$$

der t er tida, m er massen til lekamen og c er lysfarten.

- a) Vis at denne samanhengen reduserar seg til Newtons andre lov slik vi kjenner henne frå før, $F = mv'(t)$, hvis vi lar lysfarten c gå mot uendeleg.
- b) Finn farten som funksjon av tida til ein lekam som kjenner ei konstant kraft F (når c ikkje går mot uendeleg). Anta at lekamen er i ro ved tida $t = 0$, og lat v vere positiv for $t > 0$.
- c) Vis at $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = c$. (Hint: $\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} = \frac{Ft}{mc} \sqrt{\left(\frac{mc}{Ft}\right)^2 + 1}$.)



Oppgave 2

Finn den generelle løysinga av desse differensiallikningane:

- a) $y'' + y' - 12y = 0$ c) $x^2y' + 2xy + \cos x = 0$
b) $xy + y = xy'$ d) $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$

Oppgave 3

Løys desse initialverdiproblema

- a) $y' + xy = x$, $y(0) = 2$
b) $x^2y' + \sqrt{y} = 0$, $y(1) = 1$
c) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

Oppgave 4

Lat oss tenkje oss at liket av ein person vert funnen i ein park klokka 16:15 ein dag. Det viser seg å ha temperaturen 21°C . Ein etterforskar ynskjer å estimere tidspunktet då personen døydde. Basert på Newtons avkjølingslov set han opp denne modellen for temperaturen (i Celcius-grader) til liket som funksjon at tida på døgnet (i antal timar etter midnatt):

$$T'(t) = -k (T(t) - f(t)) \quad \text{der} \quad f(t) = 3.2 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 13)\right) + 13.1$$

- a) Forklar kvifor dette svarar til at gjennomsnittstemperaturen denne dagen er $1/24 \cdot \int_0^{24} f(t) dt$ (i Celcius-grader). Finn denne gjennomsnittstemperaturen.
b) Gitt at $k = 0.1$ (eining: per time), finn den generelle løysinga av den lineære differensiallikninga over.
c) Den generelle løysinga inneheld eit ledd som er proporsjonalt med ein vilkårleg konstant. Vis at dette leddet er den generelle løysinga av den tilsvarende homogene differensiallikninga,

$$T' + kT = 0 \quad .$$

- d) Finn den løysinga som oppfyller initialkravet $T(16.25) = 21$.
e) Med utgangspunkt i denne modellen, set opp ei likning som bestemmer tidspunktet for dødsfallet. (Du kan gå ut frå at personen ikkje hadde feber.)
f) Bestem dødstidspunktet ved å løyse denne likninga ved hjelp av Newtons metode.