

Innlevering nr. 4

Løysingsforslag

Oppg. 1

$$a) \quad 3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 15 & 9 \\ 3 & 0 & 24 \end{pmatrix}}}$$

A+B: Ikke definert; matrisene må ha samme format for at vi skal kunne legge dei sammen.

$$C - 2D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 & 0-(-6) \\ 0-0 & -1-2 \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}}$$

b) A er ei 3×3 -matrise, B er ei 2×3 -matrise. Siden talet på søyler i A er ulikt talet på rader i B, er ikke produktet AB definert.

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 3.7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 8 \\ 3.7 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3.7 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 & 3.7 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 6.7 & 12.4 & 22.1 \end{pmatrix}}}$$

B har 3 søyler, og C har to rader. Derfor er ikke BC definert.

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 3.7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 & -2+0 & 0 \\ 0-1 \cdot 3.7 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -3.7 & -1 & -1 \end{pmatrix}}}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 & 1 \cdot (-3) + 0 \\ 0 - 0 & 0 - 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

c) Vi løser likninga $AX = I$

Totalmatrise:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \quad -1 \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ 2 \\ \downarrow \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right) \leftarrow (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \uparrow \\ 3 \quad -3 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ -2 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

B er ikke invertibel
fordi den ikke er
kvadratisk.

d) Vi tenker oss at vi har liknings-
systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ der $\vec{b}$ er en eller
annen vektor i $\mathbb{R}^3$. Siden A er
invertibel, har vi:

$$A^{-1} A \vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

$$I \vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

Vi ser at uansett hva $\vec{b}$ er, vil

$\vec{x}$ vere $A^{-1}\vec{b}$, som er ein ein tydig vektor i $\mathbb{R}^3$. Løsninga av $A\vec{x} = \vec{b}$, altså eit lineings-system som har A som koeffisientmatrise, er alltid ein tydig.

e) $A\vec{x} = \vec{v}$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -40 \cdot 0 + 16 \cdot (-1) + 9 \cdot 2 \\ 13 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 \\ 5 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Oppg. 2

Rotasjon:

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a) $\theta = 60^\circ$:

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

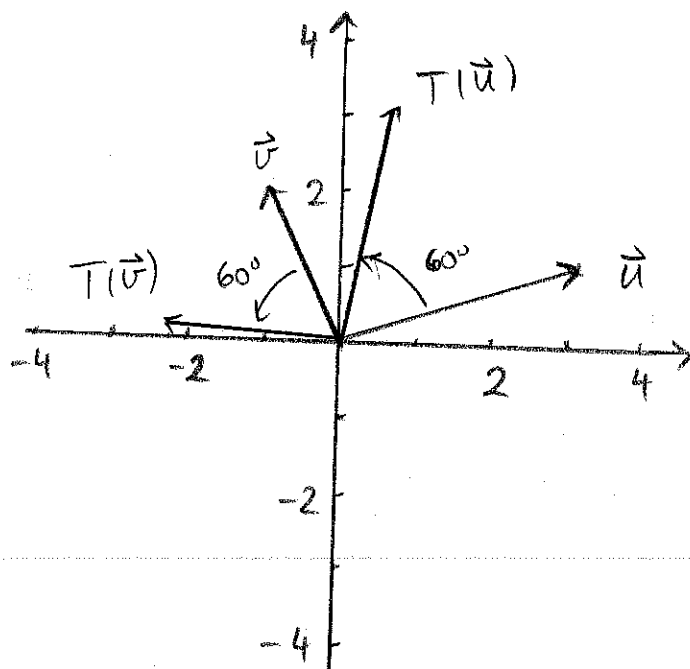
$$T(\vec{u}) = T\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - \sqrt{3} \cdot 1 \\ \sqrt{3} \cdot 3 + 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3} + 1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.63 \\ 3.10 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{3} \cdot 2 \\ -\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.23 \\ 0.13 \end{pmatrix}$$

b)



c) Rotasjon med vinkelen θ omkring x-aksen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Vi ser at denne transformasjonen gjør det

Samme med y og z -koordinatene til vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ som transformasjonen i a) gir med

x og y for vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. x -koordinaten i $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ blir uendra. Tilsvarende blir z -

koordinaten uendra når vi roterer omkring z -aksen, medan x - og y -koordinatene vert endra som i a). Derfor blir standard-matrisa for rotasjon med vinkelen θ omkring z -aksen denne:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

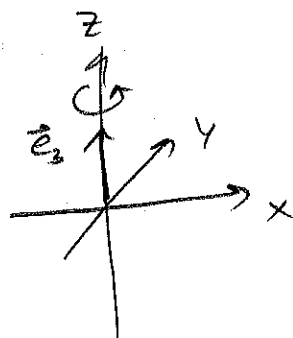
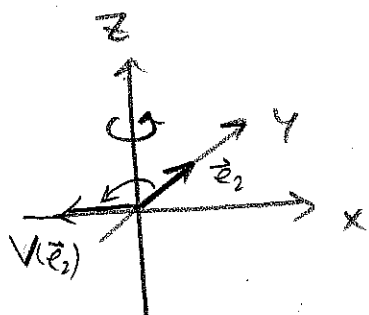
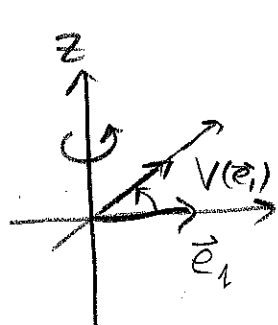
Med $\theta = 90^\circ$ får vi et standard-matrisa for

U er $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}}$ og standard-matrisa for

V er $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

Alternativt kan vi finne standardmatrise til V ved å sjå på transformasjonen av einingsvektorene:

$$(V(\vec{e}_1) | V(\vec{e}_2) | V(\vec{e}_3))$$



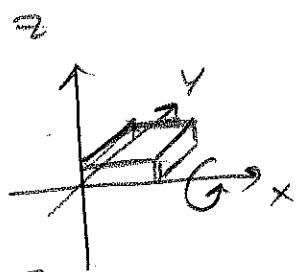
○ Ser: $V(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

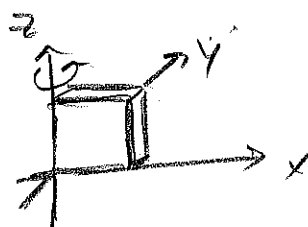
$$V(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Standardmatrise:
$$\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

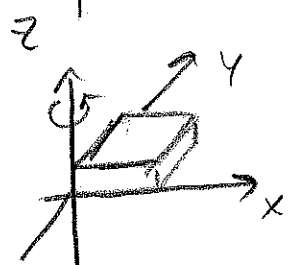
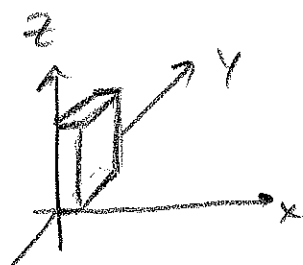
d) Vi illustrerer rotasjonene:



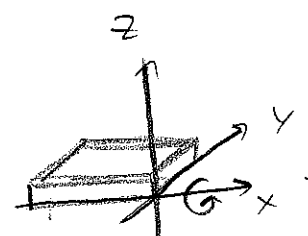
$\xrightarrow{U}$



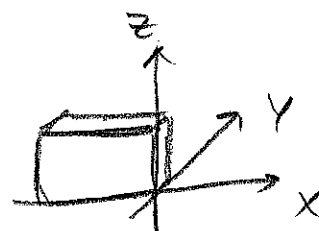
$\xrightarrow{V}$



$\xrightarrow{V}$



$\xrightarrow{U}$



Av figuren ser vi at boka blir ståande i ulike posisjonar i dei to tilfella. Altså har rekkefølga noko å seie.

$$e) \quad \underline{V(u(\vec{x}))} = V\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Standardmatrise: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{U(V(\vec{x}))} = U\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \cdot (-1) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Standardmatrise: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vi ser at standardmatrisene er ulike.
Difor er også dei samansette transformasjonane ulike; rekkefølga har noko å seie.

