

Løsningsforslag, obligatorisk innlevering 1

Oppg. 1

$$a) \ln \sqrt{a} - \ln \sqrt[3]{a} + \ln \sqrt[4]{a} =$$

$$\ln a^{1/2} - \ln a^{1/3} + \ln a^{1/4} =$$

$$\frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{3} \ln a + \frac{1}{4} \ln a =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \ln a = \frac{6-4+3}{12} \ln a = \underline{\underline{\frac{5}{12} \ln a}}$$

$$b) \frac{2^3 \cdot 4^2}{e^{\ln 32}} = \frac{2^3 \cdot (2^2)^2}{32} = \frac{2^3 \cdot 2^{2 \cdot 2}}{2^5} =$$

$$\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5} = 2^{3+4-5} = 2^2 = \underline{\underline{4}}$$

Oppg. 2

$$a) \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\text{Vert: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Setter dette inn i likningen:

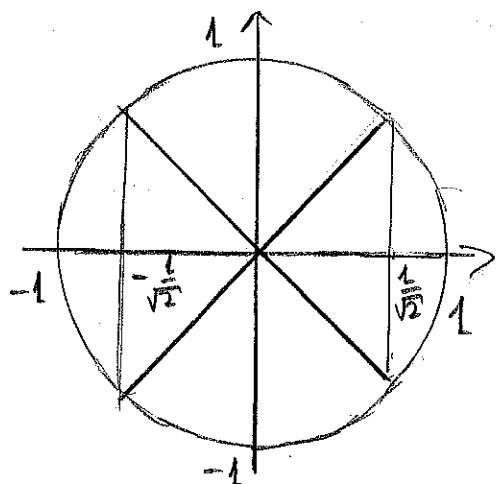
$$1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$1 - 2 \cos x = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \cos^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4}$$



Av enhetssirkelen ser vi at vi får følgende løsning i første omgang:

$$\underline{x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}}$$

b) $\frac{e^x}{1+4e^{-x}} = 2$

$$e^x = 2(1+4e^{-x}) = 2+8e^{-x}$$

$$e^x \cdot e^x = (2+8e^{-x})e^x$$

$$(e^x)^2 = 2e^x + 8$$

$$(e^x)^2 - 2e^x - 8 = 0$$

$$e^x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = 1 \pm 3$$

$$e^x = 1+3 = 4 \vee e^x = 1-3 = -2$$

e^x kan aldri være negativ

$$e^x = 4, \quad x = \underline{\ln 4}$$

Oppg. 3

a) Vi ser av grafen at $a(t)$ er kontinuertlig for alle t bortsett fra 10 og 30. For $t=10$ og $t=30$ henger ikke grafen sammen. Derfor er den ikke kontinuertlig her. Vi kan også se dette ved å se hva som skjer med $a(t)$ når t nærmer seg 10 og når t nærmer seg 30:

$$\lim_{t \rightarrow 10^-} a(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 10^+} a(t) \approx 10$$

Siden $\lim_{t \rightarrow 10^-} a(t) \neq \lim_{t \rightarrow 10^+} a(t)$, er ikke grenseverdien $\lim_{t \rightarrow 10} a(t)$ definert. Dermed er ikke kravet til kontinuitet i $t=10$,

$\lim_{t \rightarrow 10} a(t) = a(10)$, oppfylt. Derfor er a diskontinuertlig for $t=10$

Tilsvarende:

$$\lim_{t \rightarrow 30^-} a(t) \approx 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 30^+} a(t) \approx -50$$

Altså er $\lim_{t \rightarrow 30^-} a(t) \neq \lim_{t \rightarrow 30^+} a(t)$ og $a(t)$ er diskontinuertlig når $t=30$.

b) Vi ser at $a(t)$ er konstant, hverken voksende eller avtakende når, når $x \in [0, 10)$.

Når $x \in (10, 30)$ ser vi av grafen at $a(t)$ avtar, og når $x \in (30, 35]$ er a voksende.

c) Vi leser av på grafen og finner at $a(t) \approx 5$ når $t = 13,5$ (se figur s. 11).

d) Vi tar utgangspunkt i mulighetene $y = a(t)$ og undersøker hvor mange løsninger denne har for ulike verdier av y . Om y er positiv, kan vi finne en, men ikke flere, løsninger mellom 10 og 30. Tilsvarende, om y er negativ, kan vi finne maksimalt en løsning for t mellom 30 og 35.

Begge delene av grafen ser ut til å nærme seg 0 når t øker, men ingen av dem blir 0. Ut fra grafen er det vanskelig å si hva $a(10)$ og $a(30)$ er - eller om de er definert. Men dersom $a(10) = 0$, er dette

0k, $t=10$ vil i så fall være den eneste løsningen av likninga $a(t)=0$.

Med andre ord vil aldri likninga $y=a(t)$ ha mer enn en løsning i intervallet $[10, 35]$. Derfor er a en-entydig for $t \in [10, 35]$.

e) Vi ser at der ikke er noen vertikal akselerasjon de første 10 sekundene. Da står nok hopperen fremdeles i flyet. Så, ved $t=10$, får plutselig hopperen en akselerasjon på ca 10 m/s^2 . Hun eller han har altså hoppet ut av flyet. Vi ser at akselerasjonen øker. Dette skyldes luftmotstanden hopperen opplever når farten øker. Så får plutselig akselerasjonen en stor, negativ verdi. Dette skjer ved $t=30$. Det at akselerasjonen har motsatt fortegn betyr her at hopperen opplever å bli bremsed opp. Vi ser at også nå går akselerasjonen

mot 0 - og denne gangen enda raskere.
Til slutt vil hopperen ha konstant fart -
og helst lav nok fart til at det går
bra å treffe bakken en stund
seinere.

$$f) \quad a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 10 \\ 9.81 e^{-0.196(t-10)}, & 10 < t \leq 30 \\ -50.2 e^{-1.2(t-30)}, & 30 < t \leq 35 \end{cases}$$

a) Hvert av de ulike funksjonsuttrykkene
er kontinuerlige. Derfor er a kontinu-
erlig for alle t utanom $t=10$ og
 $t=30$.

Krav til kontinuitet i $t=b$:

$$\lim_{t \rightarrow b} a(t) = a(b)$$

$t=10$:

$$\lim_{t \rightarrow 10^-} a(t) = \lim_{t \rightarrow 10} 0 = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 10^+} a(t) = \lim_{t \rightarrow 10} 9.81 e^{-0.196(t-10)} = 9.81$$

Altså: $\lim_{t \rightarrow 10^-} a(t) \neq \lim_{t \rightarrow 10^+} a(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 10} a(t)$ er
ikke veldefinert og a er diskontinuerleg

for $t=10$.

$t=30$:

$$\lim_{t \rightarrow 30^-} a(t) = \lim_{t \rightarrow 30} 9.81 e^{-0.196(t-10)} = 9.81 e^{-0.392} \approx 0.195$$

$$\lim_{t \rightarrow 30^+} a(t) = \lim_{t \rightarrow 30} -50.2 e^{-1.2(t-30)} = -50.2$$

$\lim_{t \rightarrow 30^-} a(t) \neq \lim_{t \rightarrow 30^+} a(t) \Rightarrow a$ er diskontinuerlig for $t=30$.

f - b)

$$0' = 0$$

$$(9.81 e^{-0.196(t-20)})' =$$

$$9.81 e^{-0.196(t-20)} \cdot (-0.196) = -1.92276 e^{-0.196(t-20)}$$

$$(-50.2 e^{-1.2(t-30)})' =$$

$$-50.2 e^{-1.2(t-30)} \cdot (-1.2) = 60.24 e^{-1.2(t-30)}$$

Vi får

$$a'(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 10 \\ -1.92276 e^{-0.196(t-10)}, & 10 < t < 30 \\ 60.24 e^{-1.2(t-30)}, & 30 < t < 35 \end{cases}$$

Eksponentiell funksjonene $e^{-0.196(t-10)}$ og $e^{-1.2(t-30)}$ er positive for alle verdier av t . Dermed ser vi at $q'(t)$ er 0 når $0 < t < 10$, negativ når $10 < t < 30$ og positiv når $30 < t < 35$. Det gir at a er hverken voksende eller avtakende når $0 < t < 10$, a er avtakende når $10 < t < 30$ og a er voksende når $30 < t < 35$.

f - c) Siden a skal være positiv, må en eventuell løsning finnes for $t \in (10, 30]$.

$$a(t) = 5$$

$$9.81 e^{-0.196(t-10)} = 5$$

$$e^{-0.196(t-10)} = \frac{5}{9.81}$$

$$-0.196(t-10) = \ln \frac{5}{9.81}$$

$$t = 10 - \frac{\ln \frac{5}{9.81}}{0.196} \approx 13.44 \approx \underline{\underline{13.4}}$$

f-d) Vi ser på likninga $a(t)=y$. Videre studerer vi tre tilfeller separat:

1) $y > 0$, 2) $y < 0$, 3) $y = 0$

1) For at likninga $a(t)=y$ med $y > 0$ skal ha en løsning, må $t \in (10, 30]$

$$9.81 e^{-0.196(t-10)} = y$$

$$t = 10 - \frac{\ln \frac{y}{9.81}}{0.196} \quad (\text{se oppg. f-c})$$

Dersom $t \in (10, 30]$ gir dette en løsning.

2) Løsningen av $a(t)=y$ må ligge i intervallet $[30, 35]$ når $y < 0$:

$$50.2 e^{-1.2(t-30)} = y$$

$$t = 30 - \frac{\ln \frac{y}{-50.2}}{1.2} \quad \left(\frac{y}{-50.2} > 0 \right)$$

Noe en gang ser vi at vi finner maksimalt en løsning.

3) $a(t)=0$

For $t \in [10, 35]$ er det bare en løsning, nemlig $t=10$ ($a(10)=0$).

Altså har likninga $a(t)=y$ maksimalt en løsning i de tre tilfellene. Siden disse tilfellene tilsvarer disjunkte "ikke-over-

lappende") mengder for t , vil lileuinga
 $a(t)=y$ aldri ha mer enn en løsnig.
Altså er a en-entydig når
 $t \in [10, 35]$.

