

Løysingsforslag, heildagsprøve

Oppg. 1

$$a) \quad f(x) = 5x^{3.2} - \cos(3x)$$

$$f'(x) = 5 \cdot 3.2 x^{3.2-1} - (-\sin(3x)) \cdot 3 = \\ \underline{\underline{16x^{2.2} + 3\sin(3x)}}$$

$$g(t) = e^{t^2}$$

$$u(t) = t^2, \quad g = e^u$$

Kjernerregelen:

$$g'(t) = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u \cdot u'(t) = e^u \cdot 2t = \underline{\underline{2te^{t^2}}}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} t \sin \frac{1}{t} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}$$

Variabelbytte: $u = \frac{1}{t}$

$$u \rightarrow 0^+ \text{ når } t \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} t \sin \frac{1}{t} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \underline{\underline{1}}$$

$$c) \quad 6 \cos x - 3 = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$$

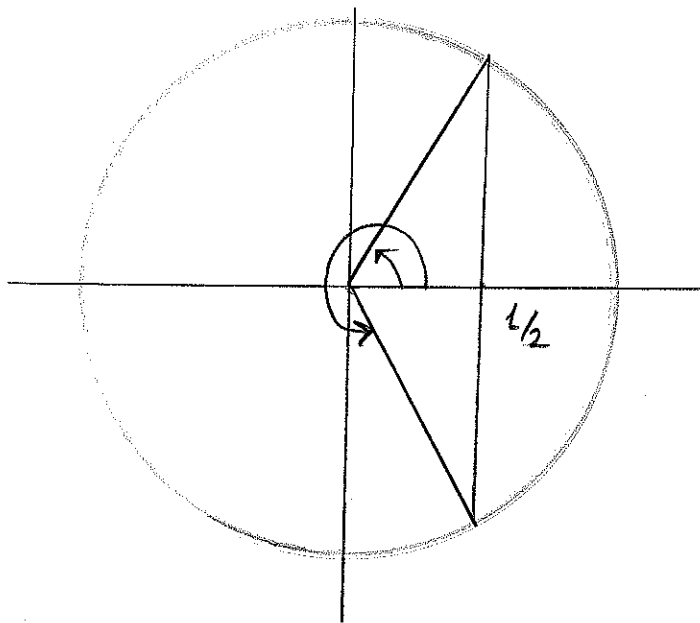
$$\cos x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

For $x \in [0, 2\pi)$:

$$\underline{x = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}}$$



$$3^{x+2} = 2^{x-3}$$

$$\ln 3^{x+2} = \ln 2^{x-3}$$

$$(x+2) \ln 3 = (x-3) \ln 2$$

$$x (\ln 3 - \ln 2) = -3 \ln 2 - 2 \ln 3$$

$$x = \underline{\underline{-\frac{3 \ln 2 + 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}}} = -\frac{\ln 8 + \ln 9}{\ln 3 - \ln 2}$$

d) Påstand:

$$"x > -3 \wedge x \leq 5 \Leftrightarrow x \in (-3, 5]"$$

Dette er sant.

Påstand:

$$"f(-1) < 0 \wedge f(1) > 0 \Rightarrow \exists x \in (-1, 1) \mid f(x) = 0"$$

Dette stemmer ikke; f trenger ikke være kontinuerlig.

Moteksempel: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(-1) = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 > 0$$

Men f har ingen nullpunkt (heller ikke mellom -1 og 1).

Påstand:

"Derfor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ er lineært avhengig, kan $\vec{v}_1$ skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$."

Dette stemmer ikke. Minst en av vektorene skal være en lineærkombinasjon av dei andre, men det trenger ikke være $\vec{v}_1$.

Moteksempel: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Sebbe er lineært avhengig siden $\vec{0}$ er

med. Men $\vec{v}_1$ kan ikke skrives som en lineær kombinasjon av $\vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$.

Påstand: "Span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$ "

Dette stemmer.

15:40

Oppg. 2

$$f(x) = -e^x + \frac{1}{2}x + 2, \quad D_f = [-2, 2]$$

a) $f'(x) = -e^x + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2} - e^x}}$

b) f er summen av tre elementære funksjoner som alle er kontinuerlige for alle x . Derfor er f kontinuerlig.

$$f(0) = -e^0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 1$$

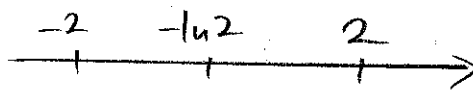
$$f(1) = -e^1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 = \frac{3}{2} - e < 0$$

Siden $f(0) > 0$ og $f(1) < 0$ og f er kontinuerlig på $[0, 1]$, må f ha minst ett nullpunkt i $(0, 1)$ ved skjæringssetningen.

Nullpunkt for $f'(x)$: $f'(x) = 0$,

$$\frac{1}{2} - e^x = 0, \quad e^x = \frac{1}{2}, \quad x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

Fortegnsskjema:



$$f'(x) = \frac{1}{2} - e^x$$

← 0 --- →

f



$$f'(x) < 0 \text{ når } x \in [0, 1] \Rightarrow$$

f er strengt avtakende når $x \in [0, 1] \Rightarrow$

f kan maksimalt ha ett nullpunkt i $[0, 1]$.

Altså har f ett- og berre ett- nullpunkt mellom 0 og 1 (q.e.d.).

c) Netons metode:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} = X_n - \frac{-e^{X_n} + \frac{1}{2}X_n + 2}{\frac{1}{2} - e^{X_n}}$$

Vi vel $x_0 = 1$

$$X_1 = x_0 - \frac{-e^{x_0} + \frac{1}{2}x_0 + 2}{\frac{1}{2} - e^{x_0}} = 1 - \frac{-e + \frac{1}{2} + 2}{\frac{1}{2} - e} \approx 0,9016$$

$$X_2 = x_1 - \frac{-e^{x_1} + \frac{1}{2}x_1 + 2}{\frac{1}{2} - e^{x_1}} \approx 0,8951$$

$$X_3 \approx 0,8951$$

Nullpunkt: $x \approx 0,90$

d) Av forteikenskjemmet i deloppgave b) ser vi at f har eit lokalt maksimalpunkt for $x = -\ln 2$ og at f har lokale minimalpunkt for $x = -2$ og $x = 2$.

Maksimalpunktet må vere globalt sidan det er det einaste lokale maksimalpunktet for ein kontinuerleg funksjon definert på eit lukka intervall.

Tilsvarende, vil det lokale minimalpunktet med lågast funksjonsverdi vere globalt.

$$\begin{aligned} f(-\ln 2) &= -e^{-\ln 2} + \frac{1}{2} \cdot (-\ln 2) + 2 = -\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} + 2 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

$$f(-2) = -e^{-2} + \frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 1 - \frac{1}{e^2}$$

$$f(2) = -e^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = -(e^2 - 3) < f(-2)$$

Globalt maksimalpunkt: $(-\ln 2, \frac{3}{2} - \frac{\ln 2}{2})$

Lokalt minimalpunkt: $(-2, 1 - \frac{1}{e^2})$

Globalt — — — : $(2, -(e^2 - 3))$

17:50

Oppg. 3

Vi et x_1 kg banan, drikk x_2 kg lett-
mjølk og et x_3 kg havregryn.

Av protein får vi da i oss

$x_1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ g/kg} + x_2 \text{ kg} \cdot 3 \text{ g/kg} + x_3 \text{ kg} \cdot 11 \text{ g/kg}$,
og dette skal være like 6g:

$$x_1 \cdot 1 \text{ g} + x_2 \cdot 3 \text{ g} + x_3 \cdot 11 \text{ g} = 6 \text{ g} \Leftrightarrow$$

$$x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 6$$

Tilsvarende, for fett:

$$x_1 \cdot 0 \text{ g} + x_2 \cdot 2 \text{ g} + x_3 \cdot 8 \text{ g} = 4 \text{ g}$$

Og for karbohydrat:

$$x_1 \cdot 18 \text{ g} + x_2 \cdot 5 \text{ g} + x_3 \cdot 62 \text{ g} = 40 \text{ g} \Leftrightarrow$$

$$18x_1 + 5x_2 + 62x_3 = 40$$

Altså:

$$x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 6$$

$$2x_2 + 8x_3 = 4$$

$$18x_1 + 5x_2 + 62x_3 = 40$$

(q. e. d.)

b) Vi set opp totalmatrisa for l enings-
systemet og rekke reduserer denne til
reduert  r ppeform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 11 & 6 & -18 \\ 0 & 2 & 8 & 4 & \\ 18 & 5 & 62 & 40 & \end{array}\right) \xleftarrow{\frac{1}{2}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 11 & 6 & \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 49 \\ 0 & -49 & -136 & -68 & \end{array}\right) \xleftarrow{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 11 & 6 & \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \\ 0 & 0 & 60 & 30 & \end{array}\right) \xleftarrow{\frac{1}{60}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 11 & 6 & \\ 0 & 1 & 4 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -4 \quad -11 \end{array}\right) \xleftarrow{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \end{array}\right) \xleftarrow{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \end{array}\right)$$

L ysing: $x_1 = \frac{1}{2}$
 $x_2 = 0$
 $x_3 = \frac{1}{2}$

Di tten består alltid av 50 g banan og gr ut
av 50g havregryn. M lk f r vi ikke
drikke om vi skal f lge di tten strengt.

c) 100g egg: 12g protein, 10g fett, 0g karbohydrat.

Vi tenker oss at vi et x_4 kg egg.

Proteinmengde:

$$x_1 \cdot 1g + x_2 \cdot 3g + x_3 \cdot 11g + x_4 \cdot 12g = 6g$$

Fett:

$$x_1 \cdot 0g + x_2 \cdot 2g + x_3 \cdot 8g + x_4 \cdot 10g = 4g$$

Karbohydrat:

$$x_1 \cdot 18g + x_2 \cdot 5g + x_3 \cdot 62g + x_4 \cdot 0g = 40g$$

Vi får altså likningssystemet

$$x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 6$$

$$x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 4$$

$$18x_1 + 5x_2 + 62x_3 = 40$$

Likningssystemet har 4 ukjente og består av 3 likninger. Der vil altså være minst en fri parameter; der kan ikke være et leiende tal i hver søyle i koeffisient-matrisa på trappetform. Derfor vil likningssystemet ha uendelig mange løsninger om det er konsistent.

Og det er konsistent fordi vi vet at

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

er ei løsning.

Likningssystemet har uendelig mange løsninger.

18:30

Oppg. 4

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) For at multiplikasjonen $A\vec{x}$ skal gi mening, må $\vec{x}$ ha like mange komponenter som A har søyler. Altså er frårommet $\mathbb{R}^3$.

Siden A har to rader, vil produktet $A\vec{x}$ også ha to komponenter (rader). Altså er tilrommet $\mathbb{R}^2$.

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{u}) = A\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

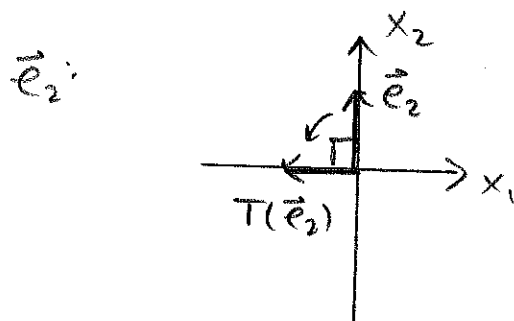
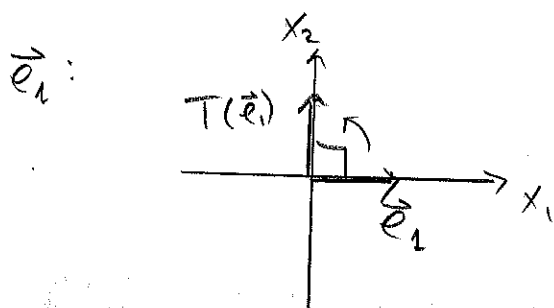
$$\begin{pmatrix} -3+0+10 \\ -1-6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

S er en rotation 90° mod klokken.

Vi finner standardmatrise B som

$$B = (T(\vec{e}_1) \mid T(\vec{e}_2)) \text{ der } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Seer: $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Standardmatrise for S : $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

U er definert ved at $U(\vec{x}) = S(T(\vec{x}))$

$$U(\vec{x}) = S(A\vec{x}) = B \cdot (A\vec{x}) = (B \cdot A) \vec{x}$$

Standardmatrise:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alternativt:

Vi finner $u(\vec{e}_1)$, $u(\vec{e}_2)$ og $u(\vec{e}_3)$ der
 $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\in \mathbb{R}^3$).

$$u(\vec{e}_1) = S(T(\vec{e}_1)) = S(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = S\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u(\vec{e}_2) = S(T(\vec{e}_2)) = S(A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(\vec{e}_3) = S(T(\vec{e}_3)) = S(A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = S\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Standardmatrise:

$$(u(\vec{e}_1) | u(\vec{e}_2) | u(\vec{e}_3)) = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

c) Er likninga $T(\vec{x}) = \vec{y}$ konsistent $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^2$?

$$T(\vec{x}) = \vec{y}$$

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

Koeffisientmatrise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & \leftarrow \leftarrow \\ 1 & -2 & 1 & -3 \leftarrow \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \\ 0 & 6 & -1 & \end{array} \right)$$

Vi ser at koeffisientmatrisa på trappiform har leiande tal i lever rekkje. Vi kan derfor aldri få eit inkonsistent liknings-system (ingen leiande tal i søyla lengst til høgre i totalmatrisa). Likninga $T(\vec{x}) = \vec{y}$ er enkonsistent $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ (T er på.).

Kan likninga $T(\vec{x}) = \vec{y}$ ha meir enn ei løysing?

Vi ser at den tredje søyla i A på trappiform ikkje har nok leiande tal. Derfor vil ein av dei utgående i likninga

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ vere ubestemd. Likninga}$$

$T(\vec{x}) = \vec{y}$ kan ha meir enn ei løysing.

(T er ikkje ein-eitdyg.)

22:00

