

Heildagsprøve i matematikk 1000
Hjelpemiddel: Kalkulator og utdelt formelark
Målføre: Nynorsk
Tid: 25. november klokka 9:00 – 14:00
Antall oppgaver: 4

Husk å skrive tydeleg namn, studentnummer og klasse!

Ein skal grunngi alle svar. Alle deloppgåver (a), b), c), etc.) har lik vekt.

I oppgåvesettet vert vektorar skrivne med feit skrift, “ $\mathbf{v}$ ”, ikkje med pil over, “ $\vec{v}$ ”. (Sjølvsagt får du gjerne skrive vektorane med pil over i svaret.)

Oppgave 1

a) Deriver desse funksjonane:

- $f(x) = 5x^{3.2} - \cos(3x)$
- $g(t) = e^{t^2}$

b) Bestem desse grensene dersom dei eksisterar:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} t \sin \frac{1}{t}$

c) Løys desse likningane:

- $6 \cos x - 3 = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$
- $3^{x+2} = 2^{x-3}$

d) Avgjer om desse påstandane er sanne. Her treng du berre grunngi svaret dersom påstanda er usann.

- $x > -3$ og $x \leq 5 \Leftrightarrow x \in (-3, 5]$.
- Dersom funksjonen f oppfyller at $f(-1) < 0$ og $f(1) > 0$, må f ha eit nullpunkt mellom -1 og 1 .
- Dersom settet $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ er lineært avhengig, må $\mathbf{v}_1$ kunne skrivast som ein lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$.
- $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3$

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x) = -e^x + \frac{1}{2}x + 2$ med definisjonsmengda $D_f = [-2, 2]$,

- finn den deriverte til f .
- Forklar kvifor f har eit – og berre eitt – nullpunkt i intervallet $(0, 1)$.
- Bruk Newtons metode til å finne dette nullpunktet med minst ein rett desimal.
- Finn alle lokale maksimal- og minimalpunkt (ekstremalpunkt) for f . Kva for nokre av desse er globale?

Oppgave 3

- Tenk deg at frukosten din består av havregraut (kokt på vatn), banan og mjølk. Tabellen nedanfor viser kor mykje protein, fett og karbohydrat 1 hg, som er det same som 100 gram, av dei tre matvarene inneheld:

Matvare	Protein	Fett	Karbohydrat
100 g Banan	1 g	0 g	18 g
100 g Lettmjolk	3 g	2 g	5 g
100 g Havregryn	11 g	8 g	62 g

Tenk deg at du ynskjer at frukosten din skal innehalde 6 g protein, 4 g fett og 40 g karbohydrat. Lat x_1 , x_2 og x_3 vere talet på hg med banan, mjølk og havregryn du et eller drikk. Forklar korleis dette leier fram til dette likningssystemet:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +3x_2 & +11x_3 & = 6 \\ & 2x_2 & +8x_3 & = 4 \\ 18x_1 & +5x_2 & +62x_3 & = 40 \end{array} .$$

- Løys likningssystemet.
- Tenk deg no at du også tar med kokt i frukosten. 100 g egg inneheld 12 g protein og 10 g fett. Innhaldet av karbohydrat er så lågt at vi kan sjå bort frå det. Tenk deg også at frukosten framleis skal innehalde 6 g protein, 4 g fett og 40 g karbohydrat. Set opp eit likningssystem for kor mykje du no skal ete av kvar matvare. Utan å løyse likningssystemet, kan du seie noko om kor mange løysingar likningssystemet har?

Oppgave 4

- a) Ein lineær transformasjon T er definert ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ der

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

For at multiplikasjonen $A\mathbf{x}$ skal gi meining, kva må frårommet (“domain”) for T vere? Kva blir tilrommet (“codomain”) for transformasjonen? Finn $T(\mathbf{u})$ når

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- b) Ein annan lineær transformasjon $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er definert ved at $S(\mathbf{x})$ er den vektoren vi får når $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ blir rotert 90° mot klokka i eit koordinatsystem. (x_1 -aksen peikar mot høgre og x_2 -aksen peikar oppover.) Finn standardmatrisa til S .

Finn også standardmatrisa til transformasjonen U , som er definert ved fyrst å gjere transformasjonen T og så transformasjonen S ; $U(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x}))$.

- c) Vil likninga $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ vere konsistent for alle $\mathbf{y}$ i tilrommet? Kan likninga $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ ha meir enn ei løysing? (Spurd på ein anna måte: Er T på (“onto”)? Er T ein-eintydig (“one-to-one”)?)