

Løsningsforslag til "halvdagsprøven", 3 feb.

Oppg. 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Totalmatrise: } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right) \leftarrow \frac{1}{2} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -8 & -8 & -16 & -16 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \leftarrow \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \leftarrow \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 \text{ fri} \end{cases}$$

Løsning:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 - x_3 \\ 2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Vi ser at A , de tre første søylene i totalmatrisa, let seg rødderedusere til

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{reduert trappform})$$

Denne matrisa har ingen leiende tal i den 3. søyle. Derfor er søylene i A lineært avhengige.

c) Siden vi ikke har eit leiende tal i leddet i totalmatrisa på reduert trappform, vil det finnes vektorar $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^3$ som gjer at likninga $A\vec{x} = \vec{b}$ er inkonsistent. Om vi til dømes vel $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, blir likninga inkonsistent:

Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \uparrow \\ \uparrow \end{smallmatrix}} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Den nederste røda "seier" at $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -3$.
Likninga er inkonsistent.

Oppg. 2

$$a) f(x) = e^{-x} \cos(3x)$$

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot \cos(3x) + e^{-x} \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = \\ \underline{\underline{-e^{-x} (\cos(3x) + 3 \sin(3x))}}$$

$$g(x) = \ln(\sin^2 x + 3)$$

$$u = \sin^2 x + 3, \quad g = \ln u$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (2 \sin x \cdot \cos x + 0) = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + 3} \\ \left(= \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x + 3} \right)$$

$$b) S(t) = \begin{cases} t^2/2, & 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right) + 2, & 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

$$D_S = [0, 4]$$

$\frac{t^2}{2}$ og $\frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right) + 2$ er begge elementære funksjoner som alltid er kontinuerlige.

S er derfor kontinuerlig på intervalla

$[0, 2)$ og $(2, 4]$. Vi viser nå at S er kontinuerlig også for $t = 2$:

$$S(2) = \frac{2^2}{2} = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{t^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} \left(\frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right) + 2 \right) =$$

$$\frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}(2-2)\right) + 2 = 2$$

Altså: $\lim_{t \rightarrow 2^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} S(t)$

$$\lim_{t \rightarrow 2} S(t) = 2 = S(2)$$

Difor er S kontinuerleg for $s=2$ - og dermed for alle s i D_S .

Selektsetninga seier:

Dersom $f(x)$ er kontinuerleg i $[a, b]$ og deriverbar i (a, b) , finst det ein $c \in (a, b)$ som er slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

I vårt tilfelle er $s(t)$ ei størelsing som funksjon av tid. $s'(t)$ blir såleis farten (i m/s).

$$\frac{s(4) - s(0)}{4 - 0} \text{ er gjennomsnittsfarten.}$$

Selektsetninga seier då at det finst (minst) ein $t \in (0, 4)$ som er slik at

$$s'(t) = \frac{s(4) - s(0)}{4} \quad - \text{altså at farten er lik gjennomsnittsfarten.}$$

c) Vi skal løse ligningen $S'(t) = \frac{S(4) - S(0)}{4}$

$$\frac{S(4) - S(0)}{4} = \frac{\frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}(4-2)\right) + 2 - \frac{0^2}{2}}{4} = \frac{\frac{8}{\pi} \cdot 1 + 2}{4} =$$

$$\underline{\underline{\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \approx 1.137}}$$

$$\left(\frac{t^2}{2}\right)' = t$$

$$\frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right) + 2 = \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right) \cdot \frac{\pi}{4} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right)$$

$$S'(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2 \\ 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right), & 2 < t < 4 \end{cases}$$

For $0 < t < 2$:

$$t = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \approx 1.14$$

For $2 < t < 4$:

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\right) \approx 0.966$$

$$\frac{\pi}{4}(t-2) \approx 0.966 + n \cdot 2\pi \quad \checkmark$$

$$\frac{\pi}{4}(t-2) \approx -0.966 + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{4}{\pi} \cdot 0.966 + n \cdot 8 + 2 \quad \vee \quad t = -\frac{4}{\pi} \cdot 0.966 + n \cdot 8 + 2$$

$$\text{For } 2 < t < 4: \quad t \approx \frac{4}{\pi} \cdot 0.966 + 2 \approx 3.230 \approx 3.23$$

$$\text{Løysing: } \underline{\underline{t = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \approx 1.14 \quad \vee \quad t \approx 3.23}}$$

Oppg. 3

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_4 \\ 2x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

a) Vi ser at vektoren som blir transformert har 4 element; frørommet er $\mathbb{R}^4$.

Vi ser også at den transformerte vektoren har 2 element; tilrommet er $\mathbb{R}^2$.

$$T(\vec{u}) = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\vec{0}}$$

$$T(\vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\vec{0}}$$

b) Det er gitt at T er lineær.

$$\text{Altså: } T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4 \text{ og} \\ T(c\vec{x}) = cT(\vec{x}) \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ og } \vec{x} \in \mathbb{R}^4.$$

Dette gir at

$$T(s\vec{u} + t\vec{v}) = T(s\vec{u}) + T(t\vec{v}) = \\ sT(\vec{u}) + tT(\vec{v}) = s \cdot \vec{0} + t \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad (\text{q.e.d.})$$

$$c) \quad T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_4 \\ 2x_1 - x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Standardmatrix ist $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}}$

Alternativ:

Standardmatrix: $(T(\vec{e}_1) | T(\vec{e}_2) | T(\vec{e}_3) | T(\vec{e}_4))$

$$T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{e}_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Standardmatrix ist $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}}$