

“Halvdagsprøve” i matematikk 1000
Hjelpemiddel: Kalkulator og utdelt formelark
Målføre: Nynorsk
Tid: 3. februar klokka 13:00 – 16:00
Talet på oppgaver: 3

Husk å skrive tydeleg namn, studentnummer og klasse.
Ein skal grunngi alle svar. Alle deloppgåver (a), b), c), etc.) har lik vekt.

Oppgåve 1

Matrisa A er gitt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

- a) Finn alle løysingar av likninga $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$
- b) Er søylene i A lineært uavhengige?
- c) Kan det finnast ein vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ som er slik at likninga $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er inkonsistent (d.v.s. utan løysing)? Finn i så fall ein slik $\mathbf{b}$. Hvis ikkje, argumentér for at likninga alltid vil ha løysing.

Oppgåve 2

- a) Finn dei deriverte til funksjonene

$$f(x) = e^{-x} \cos(3x) \quad \text{og} \quad g(x) = \ln(\sin^2 x + 3) .$$

- b) Vi tenkjer oss at ein ball trillar nedover ein bakke. Etter t sekund har ballen trilla s meter der

$$s(t) = \begin{cases} t^2/2, & 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right) + 2, & 2 < t \leq 4 \end{cases}, \quad D_s = [0, 4]$$

Forklar kvifor funksjonen $s(t)$ er kontinuerleg i heile definisjonsmengda.

Funksojnen er også *deriverbar* i heile definisjonsmengda (bortsett frå endepunkta). Du treng ikkje vise dette. Dette gjer at vi trygt kan påstå at ballen trillar med gjennomsnittsfarten ved minst eitt tidspunkt. (Gjennomsnittsfarten for dei fire fyrste sekunda er $(s(4) - s(0))/4$ – gitt i meter per sekund.) Kva setning eller teorem er det som gjer at denne påstanda er rett?

- c) Finn ut når ballen faktisk trillar med gjennomsnittsfarten. Her aksepterar vi tilnærma svar.

Oppgåve 3

Ein lineær transformasjon T er definert ved

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_4 \\ 2x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

- a) Kva er frårommet og tilrommet for T ? Vis at både $T(\mathbf{u})$ og $T(\mathbf{v})$ er lik null-vektor, altså vektoren med berre 0-ar, når

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Forklar kvifor $T(s\mathbf{u} + t\mathbf{v})$ blir null-vektor for alle mogelege verdiar av s og t .
- c) Finn standardmatrisa for T .