

Eksamen i

FO010A Matematikk 1000

Obligatorisk prøve

3 AV FEM OPPGAVER TELLER

Vedlegg

Ingen

Tillatte hjelpemidler

Alle trykte og skrevne hjelpemidler
samt godkjent kalkulator

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

Bestem disse grenseverdiene:

a) Ved L'Hospitals regel har vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 4x}{1 + \tan^2 x} = \underline{4}$$

b) Ved L'Hospitals regel har vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x^2 + 1)}{\ln(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x/(4x^2 + 1)}{-\sin x / \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x}{(4x^2 + 1) \tan x}$$

Dette gir et nytt ubestemt uttrykk på formen "0/0", og L'Hospitals regel gir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x}{(4x^2 + 1) \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8}{(4x^2 + 1)(1 + \tan^2 x) + 8x \tan x} = \underline{\underline{-8}}$$

Oppgave 2

a) Vi setter inn $x = 2$ og $y = 1$ i likningen. Siden $VS = 5$ og $HS = 5$, ser vi punktet $(2, 1)$ ligger på kurven K . Implisitt derivasjon gir

$$2y + 2xy' + 3y^2y' = 9(x - 1)^8 \Rightarrow y' = \frac{9(x - 1)^8 - 2y}{2x + 3y^2}$$

og dermed er stigningstallet til tangenten i $(2, 1)$ gitt ved $a = 1$. Likningen for tangenten blir dermed

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 2) \Rightarrow \underline{\underline{y = x - 1}}$$

- b) Skjæringspunkter mellom kurven K og linjen $x = 2$ er gitt ved likningene $2xy + y^3 = (x - 1)^9 + 4$ og $x = 2$, som gir $x = 2$ og $4y + y^3 = 5$. Siden vi vet at $y = 1$ er en løsning, finner vi de andre løsningene av

$$4y + y^3 = 5 \Rightarrow y^3 + 4y - 5 = 0$$

ved polynomdivisjonen $(y^3 + 4y - 5) : (y - 1) = y^2 + y + 5$. Vi ser at $y^2 + y + 5 = 0$ ikke har løsning, dermed er $x = 2$ og $y = 1$ eneste løsning og derfor er punktet $(2, 1)$ eneste skjæringspunkt.

Oppgave 3

- a) Vi har at varmetapet $T(r)$ er gitt ved

$$T(r) = k(\pi r^2 + 2\pi r h) + 2k(\pi r^2) = k(3\pi r^2 + 2\pi r h)$$

der h er høyden i cylinderen og k er varmetapet per m^2 fra bunn- og sideflaten. Siden $V = \pi r^2 h = 8$, får vi

$$T(r) = k \left(3\pi r^2 + 2\pi r \frac{8}{\pi r^2} \right) = k \left(3\pi r^2 + \frac{16}{r} \right)$$

- b) Den naturlige definisjonsmengden til $T(r)$ er alle $r > 0$. Vi deriverer funksjonen $T(r)$ og ser at

$$T'(r) = k \left(6\pi r - \frac{16}{r^2} \right) = \frac{2k(3\pi r^3 - 8)}{r^2}$$

Dette gir

$$T'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{3\pi}}$$

Siden $T'(r)$ er monotont voksende, betyr dette at $r = \sqrt[3]{\frac{8}{3\pi}} \simeq 0.95 \text{ m}$ gir minst varmetap.

Oppgave 4

- a) Vi bruker først delvis integrasjon, og ser at

$$\int 2x \arctan(x^2) dx = x^2 \arctan(x^2) - \int \frac{2x^3}{1+x^4} dx$$

Det siste integralet løser vi ved substitusjonen $u = 1 + x^4$, $du = 4x^3 dx$, og vi får

$$\int \frac{2x^3}{1+x^4} dx = \int \frac{1}{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^4) + C$$

Dermed ser vi at

$$\int 2x \arctan(x^2) dx = x^2 \arctan(x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+x^4) + C$$

- b) Vi ser at flaten F ligger mellom $y = f(x)$ og $y = \pi/2$ i intervallet $x \in [0, 1]$. Dermed blir volumet av omdreiningslegemet gitt som

$$V = \int_0^1 2\pi x \left(\frac{\pi}{2} - f(x) \right) dx = \int_0^1 \pi^2 x dx - 2\pi \int_0^1 2x \arctan(x^2) dx$$

ved sylinderskallmetoden. Vi bruker integralet fra forrige deloppgave, og ser at

$$\int_0^1 2x \arctan(x^2) dx = \left[x^2 \arctan(x^2) - \frac{\ln(1+x^4)}{2} \right]_0^1 = \arctan(1) - \frac{\ln 2}{2}$$

Dermed er

$$V = \frac{\pi^2}{2} - 2\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right) = \underline{\underline{\pi \ln 2}} \simeq 2.18$$

Oppgave 5

- a) Vi finner først den homogene løsningen av $y'' + 4y = 0$. Den karakteristiske likningen er $r^2 + 4 = 0$, som har to komplekse løsninger $r = \pm 2i$. Dermed er den homogene løsningen gitt ved

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Vi ser deretter etter en partikulær løsning av $y'' + 4y = 2$, og prøver med $y = A$ siden 2 er en konstant. Innsetting gir $0 + 4A = 2$, som har løsning $A = 1/2$. Dette gir partikulær løsning $y_p = 1/2$, og generell løsning

$$y = y_h + y_p = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2}$$

Vi setter inn $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$ i y og $y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$, og får

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$

og

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 2C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

Dermed er løsningen av initialverdiproblemet

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2}}}$$

- b) Vannet strømmer ut av tanken med en hastighet v som er proporsjonal med $\sqrt{h}$, dermed er $v = k'\sqrt{h}$. Dersom tverrsnittsarealet til hullet i tanken er A , betyr det at endringen av volumet vann i tanken er gitt som

$$V' = A \cdot v = Ak'\sqrt{h}$$

Siden $V = G \cdot h$, hvor G er grunnflaten i tanken, er $V' = Gh'$. Kombinerer vi disse uttrykkene, får vi følgende differensiallikning i h :

$$Ak'\sqrt{h} = Gh' \Rightarrow h' = \frac{Ak'}{G}\sqrt{h} = k\sqrt{h}$$

Vi har brukt at A og G er konstante i utledningen ovenfor. Den generelle løsningen er dermed gitt ved

$$\frac{1}{\sqrt{h}}h' = k \Rightarrow 2\sqrt{h} = kt + C \Rightarrow h = \left(\frac{kt + C}{2}\right)^2$$

La h_0 være høyden ved tiden $t = 0$; innsetting gir $h_0 = (C/2)^2$. Dermed er $C = 2\sqrt{h_0}$, og vi får

$$h = \left(\frac{kt}{2} + \sqrt{h_0}\right)^2$$

Når $t = 7$ er $h = h_0/4$ siden volumet er redusert med $3/4$, og vi får

$$\frac{h_0}{4} = \left(\frac{7k}{2} + \sqrt{h_0}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{h_0}}{2} = \frac{7k}{2} + \sqrt{h_0} \Rightarrow k = -\frac{\sqrt{h_0}}{7}$$

Dette gir

$$h(t) = \left(\frac{-\sqrt{h_0}t}{14} + \sqrt{h_0}\right)^2 = h_0 \left(1 - \frac{t}{14}\right)^2$$

Dermed ser vi at tanken er tom ved $t = 14$, dvs etter 14 min.