

Oppgave 1

a) i)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^{2x} \\ f'(x) &= (x^2)' \cdot e^{2x} + x^2 (e^{2x})' = 2xe^{2x} + x^2 e^{2x} \cdot (2x)' = \\ &= 2xe^{2x} + 2x^2 e^{2x} = \underline{\underline{2xe^{2x}(1+x)}} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(\sin x) + x^2 \\ g'(x) &= \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' + 2x = \frac{\cos x}{\sin x} + 2x = \frac{1}{\tan x} + 2x \end{aligned}$$

b) i) Sidan både teljar og nemnar går mot 0 når $x \rightarrow 5$, kan vi bruke L'Hôpitals regel:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \cos(x-5)}{25 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(1 - \cos(x-5))'}{(25 - x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin(x-5)}{-2x} = \\ &= \frac{\sin(5-5)}{-2 \cdot 5} = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

ii) Vi innfører variabelbyttet $u = 1/x$. Når $x \rightarrow \infty$, vil vi ha at $u \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} \sin u = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \underline{\underline{1}}$$

c) i)

$$\int \left(x + \frac{1}{2x-1} \right) dx = \int x dx + \int \frac{1}{2x-1} dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \ln |2x-1| + C}}$$

For å anti-derivere det siste leddet har vi bruka reglane

$$\int 1/x dx = \ln |x| + C \text{ og}$$

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(ax+b) dx = 1/a \cdot F(ax+b) + C.$$

ii)

$$\int \cos x \sin^3 x dx$$

Variabelbyte:

$$x = \sin x, \quad \frac{du}{dx} = \cos x, \quad dx = \frac{1}{\cos x} du$$

$$\int \cos x \sin^3 x dx = \int \cos x u^3 \frac{1}{\cos x} du = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \underline{\underline{\frac{1}{4} \sin^4 x + C}}$$

d) i)

$$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

Det fyrste leddet på høgre side blir null sidan integranden er ein odde funksjon og integrasjonsintervallet er symmetrisk om 0. Ein kan også sjå at det blir 0 ved variabelbyte:

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 1, & \frac{du}{dx} &= 2x, & du &= \frac{1}{2x} dx \\ u(-1) &= (-1)^2 + 1 = 2 & \text{og} & & u(1) &= 1^2 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Det gir:

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_{u(-1)}^{u(1)} \frac{x}{u} \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int_2^2 \frac{1}{u} du = 0.$$

Sidan $\int 1/(x^2+1) dx = \arctan x + C$, får vi at

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx &= 0 + [\arctan x]_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = \\ &2 \arctan 1 = 2 \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}. \end{aligned}$$

ii)

$$\int_0^1 x e^{2x} dx$$

Delvis integrasjon: $\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx$.

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{2x} \Leftarrow v = e^{2x}/2.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{2x} dx &= \left[x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \\ &\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} [e^{2x}]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{e^2+1}{4}}}. \end{aligned}$$

e) i)

$$\begin{aligned} e^{x^2-4x} &= 1 = e^0 \\ x^2 - 4x &= 0 \\ x(x-4) &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{eller} \quad x-4=0 \\ \underline{\underline{x=0}} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{x=4}} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(1-i)z &= 1 + \sqrt{3}i \\ z &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{1-i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i^2}{1+1} = \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i}{1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i}{1}\end{aligned}$$

På polarform:

 $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$ slik at

$$\begin{aligned}\sqrt{2}e^{-i\pi/4}z &= 2e^{i\pi/3} \\ z &= \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i[\pi/3-(-\pi/4)]} = \underline{\underline{\sqrt{2}e^{i7\pi/12}}}\end{aligned}$$

Oppgave 2

- a) Vi skal finne den maksimale verdien g kan ha. Maksimalverdiar kan vere randpunkt eller punkt der den deriverte skiftar forteikn frå positiv til negativ. Vi deriverar:

$$\begin{aligned}g'(x) &= 1 + 0.1(e^{0.1x} \cdot 0.1(10x - x^2) + e^{0.1x}(10 - 2x)) = \\ &= 1 + 0.1e^{0.1x} + (x - 0.1x^2 + 10 - 2x) = 1 + 0.1e^{0.1x}(10 - x - 0.1x^2)\end{aligned}$$

Sidan $g'(0) = 1 + 0.1 \cdot 10 = 2 > 0$, vil ikkje randpunktet i $x = 0$ vere eit maksimalpunkt. g' må difor endre forteikn for at g skal vere maksimal. Sidan både g og g' er kontinuerlege, må $g'(x)$ vere 0 der dette skjer. Altså:

$$\underline{\underline{1 + 0.1e^{0.1x}(10 - x - 0.1x^2) = 0}} \quad .$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -g - kv = -k(v + g/k) \\ \frac{dv}{v + g/k} &= -k dt \\ \int \frac{dv}{v + g/k} &= \int -k dt \\ \ln|v + g/k| &= -kt + C_1 \\ v + g/k &= Ce^{-kt} \quad (C = \pm e^{C_1}) \\ v &= Ce^{-kt} - \frac{g}{k} = Ce^{-0.1t} - \frac{10}{0.1} = Ce^{-0.1t} - 100\end{aligned}$$

Initialkrav: $v(0) = v_0 = 15$ (med m/s som eining). Det gir:

$$\begin{aligned}15 &= Ce^0 - 100 \\ C &= 15 + 100 = 115 \quad .\end{aligned}$$

Vi får at

$$\underline{v(t) = 115 e^{-0.1t} - 100} \quad .$$

- c) Vi let $h(t)$ vere høgda kula har over bakken, målt i meter, etter t sekund. Vi veit at $h(0) = 2$ og at $h'(t) = v(t)$ der $v(t)$ er gitt over. Dermed har vi at¹

$$\begin{aligned} h(t) &= \int v(t) dt = \int (115 e^{-0.1t} - 100) dt = -\frac{115}{0.1} e^{-0.1t} - 100t + C = \\ &= -1150 e^{-0.1t} - 100t + C \quad . \end{aligned}$$

Vi får bestemt C ved initialkravet:

$$\begin{aligned} h(0) &= 2 \\ -1150 e^0 - 0 + C &= 2 \\ C &= 2 + 1150 = 1152 \quad . \end{aligned}$$

Dermed får vi at $h(t) = -1150e^{-0.1t} - 100t + 1152$. Når kula treff bakke er høgda null – altså skal vi ha at $h(t) = 0$. Det gir denne likninga:

$$\underline{\underline{-1150 e^{-0.1t} - 100t + 1152 = 0}} \quad .$$

Oppgave 3

a)

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ 9 & -9 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

A er ei 3×3 -matrise, B er ei 2×3 -matrise. Sidan dei har ulike format, er ikkje summen av dei, $A + B$, definert. Vidare, sidan A har 3 søyler og B har 2 rekker, er heller ikkje produktet AB definert.

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ 9 & -9 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-5) + 0 \cdot (-6) + (-1) \cdot 9 & 2 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot (-9) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) \\ 4 \cdot (-5) + 3 \cdot (-6) + 2 \cdot 9 & 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-9) & 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -19 & 17 & 6 \\ -20 & 13 & 10 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

¹Alternativt kan ein implementere initialkravet direkte ved å sette opp uttrykket $h(t) - h(0) = \int_0^t v(t') dt'$.

$$\begin{aligned} 2B - 3C &= 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 9 & 15 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 0-3 & -2-(-6) \\ 8-9 & 6-15 & 4-(-6) \end{bmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & -9 & 10 \end{bmatrix}}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ 9 & -9 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 9 & -9 & -2 \end{vmatrix} = +(-2) \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= -2(4 \cdot (-4) - (-5) \cdot 3) = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Determinanten til A er ulik 0. Difor er A invertibel.

c) Vi rekkereduserar totalmatrisa for likningssystemet til trappeform:

$$\begin{bmatrix} 2 & k & 3 \\ 1 & 3 & l \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & l \\ 2 & k & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & b \\ 0 & k-6 & 3-2l \end{bmatrix}$$

i) Dersom $k-6 \neq 0$, vil vi få eit leiande tal både i søyle 1 og 2, og x_1 og x_2 vil bli eintydig bestemt. Vi får altså eintydig løysing når $k \neq 6$.Dersom $k = 6$, vil totalmatrisa på trappeform sjå slik ut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & 3-2l \end{bmatrix} \quad .$$

For at dette skal tilsvare eit konsistent likningssystem, må vi kreve at $3-2l = 0$, eller at $l = 3/2$. Vi ser også at x_2 vil bli verande ubestemt sidan der ikkje er noko leiande tal i søyle 2.ii) Vi får uendeleg mange løysingar når $k = 6$ og $l = 3/2$.iii) Dersom $3-2l \neq 0$, vil likningssystemet bli inkonsistent. Vi har altså inga løysing når $k = 6$ og $l \neq 3/2$.

a)

$$A = PDP^{-1} \quad \text{der} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Vi har fått gitt diagonaliseringa av A . Vi veit at når ei matrise kan skrivast på denne forma, $A = PDP^{-1}$, der D diagonal, vil søylene i P vere lineært uavhengige eigenvektorar for A . Vidare vil elementa langs diagonalen i D

vere eigenverdiane til A svarande til eigenvektorane i den same rekkefølga som dei står i P . Vi skal altså ha at $P = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3]$ og $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ der

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad .$$

Ut frå det som er gitt, skal vi ha eigenvektorane

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

svarande til eigenverdiane

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \text{og} \quad \lambda_3 = -2 \quad .$$

Vi sjekker at dette faktisk er eigenvektorar og -verdiar:

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ 9 & -9 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 + 3 \cdot 2 \\ -6 + 2 \cdot 3 \\ 9 - 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \\ A\mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ 9 & -9 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 + 4 \\ -6 + 5 \\ 9 - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \\ A\mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ 9 & -9 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5) \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) + 2 \\ (-6) \cdot (-2) + 5 \cdot (-2) + 2 \\ 9 \cdot (-2) + (-9) \cdot (-2) - 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_3 \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Vi ser at det stemmer.

b) Vi multipliserar den gitte matrisa med P :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -6 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot P &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -6 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1-1 & -2-(-2) \\ -6+2 \cdot 3 & -6+7 & -6 \cdot (-2) - 7 \cdot 2 + 2 \\ -3+3 & -3+3 & -3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Produktet blir altså identitetsmatrisa. Difor er den gitte matrisa inversmatrisa til P .

c) I følge oppgåveteksten er

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} \quad .$$

Sidan D er diagonal, er ho enkel å invertere:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad .$$

Kontroll:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1) \cdot (-1) & 0 \\ 0 & 0 & (-2) \cdot (-\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = I_3$$

Vi får:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= PD^{-1}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -6 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & -7 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6-3 & -1-7+3 & -2+1 \\ 6-3 & -7+3 & -2+1 \\ 3+\frac{3}{2} & -3-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \\ \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}} \quad . \end{aligned}$$

Oppgave 4

a)

$$\begin{aligned} y' + \frac{\sin x}{y} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{\sin x}{y} \\ y \, dy &= -\sin x \, dx \\ \int y \, dy &= \int -\sin x \, dx \\ \frac{1}{2}y^2 &= \cos x + C_1 \\ y^2 &= 2 \cos x + C \quad (C = 2C_1) \\ y &= \underline{\underline{\pm \sqrt{2 \cos x + C}}} \end{aligned}$$

b)

$$y'' - 6y' + 10y = 0$$

Vi prøver å finne ei løysing på forma $y = e^{rx}$. Det gir at $y' = re^{rx}$ og $y'' = r^2 e^{rx}$. Vi set dette inn:

$$r^2 e^{rx} - 6r e^{rx} + 10e^{rx} = 0$$

$$r^2 - 6r + 10 = 0$$

$$r = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = 3 \pm i$$

Det gir den generelle løysinga

$$\underline{y_h(x) = e^{3x} (A \cos x + B \sin x)} \quad .$$

c)

$$y'' - 6y' + 10y = 5x - \frac{1}{2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Det inhomogene leddet er eit fyrstegradspolynom. Vi går ut frå at vi kan finne ei partikulær løysing som også er eit fyrstegradspolynom – altså på forma $y_p = ax + b$. Det gir at $y'_p = a$ og $y''_p \equiv 0$. Dette set vi inn:

$$0 - 6a + 10(ax + b) = 5x - \frac{1}{2}$$

$$10ax - 6a + 10b = 5x - \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 10a &= 5 \\ -6a + 10b &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}$$

Vi har altså funne den partikulære løysinga $y_p = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. Om vi legg dette til den generelle løysinga av den homogene likninga frå deloppgåve b), finn vi den generelle løysinga:

$$y = y_h + y_p = e^{3x} (A \cos x + B \sin x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \quad .$$

Vi bestemmer A og B ved initialkrava:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ e^0(A \cdot 1 + B \cdot 0) + 0 + \frac{1}{4} &= 1 \\ A &= \frac{3}{4} \\ y'(x) &= e^{3x} (3A \cos x + 3B \sin x - A \sin x + B \cos x) + \frac{1}{2} \\ y'(0) &= 0 \\ e^0(3A \cdot 1 + 3B \cdot 0 - A \cdot 0 + B \cdot 1) + \frac{1}{2} &= 0 \\ 3 \cdot \frac{3}{4} + B + \frac{1}{2} &= 0 \\ B &= -\frac{11}{4} \end{aligned}$$

Vi får løysinga

$$\underline{\underline{y = e^{3x} \left(\frac{3}{4} \cos x - \frac{11}{4} \sin x \right) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \quad .}}$$

Oppgave 5

a) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$

U : Rotasjon $\pi/2$ omkring origo i $\mathbb{R}^2$.

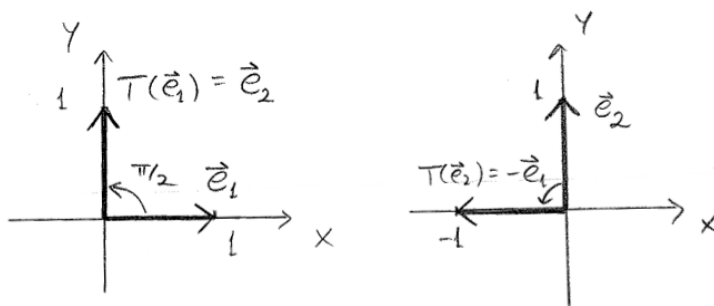
$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Altså er $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ med

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad .}}$$

Transformasjonen U frå $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ er lineær og kan difor skrivast som $U(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ der 2×2 -matrisa $B = [U(\mathbf{e}_1)|U(\mathbf{e}_2)]$. $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ er einingsvektorar langs dei to aksane;

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$



Figur 1: Transformasjonane av einingsvektorane $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$.

Figur 1 illustrerar at

$$U(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad U(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

slik at

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vi skal bestemme matrisa C slik at $W(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$. Vi veit at C oppfyller

$$C = [W(\mathbf{e}_1) | W(\mathbf{e}_2)].$$

Vi veit også at transformasjonen W er lineær. Difor har vi at

$$\begin{aligned} W\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= W(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2W(\mathbf{e}_1) + W(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \\ W\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right) &= W(5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) = 5W(\mathbf{e}_1) + 3W(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sidan $W(\mathbf{x})$ skal ligge i $\mathbb{R}^3$, kan vi skrive

$$W(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad W(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Om vi set dette inn i likningane over, får vi tre likningssystem – eitt for kvar av komponentane. Koeffisientmatrisa er den same for alle tre:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi kan løyse alle tre ved å rekkeredusere på ei stor totalmatrise:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 15 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & 2 & 3 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -15 & -2 & -3 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Dermed får vi at $x_1 = 9$, $y_1 = 1$, $z_1 = 2$, $x_2 = -15$, $y_2 = -2$ og $z_2 = -3$ slik at

$$C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} .$$